Maksymalizacja zysków zarządzanego kapitału w różnych typach gier ekonomiczno–hazardowych

Piotr WOŁOWIK *

* Instytut Elektroniki i Telekomunikacji, Politechnika Poznańska

Rozważmy następującą grę teoretyczną z wypłatą 5:1, która wprowadzi nas w zasugerowaną w tytule problematykę.

Gra polega na obstawianiu wyników rzutu kostką. Możliwe jest obstawienie dowolnej ścianki dowolną liczbę razy. Na każdy postawiony zakład, w przypadku trafienia, wypłata jest pięciokrotnie zwielokrotniona. Przy stawce 1 zł wynosi ona 5 zł netto. Oczywiście w przypadku błędnego typowania postawiona stawka jest w całości tracona.

Gra w takim przypadku jest grą sprawiedliwą z wartością oczekiwaną równą zeru:

$$E(X) = \frac{1}{6}(5) + 5\left(\frac{1}{6}(-1)\right) = 0. \tag{1}$$

Rozważmy jednak przypadek gry, gdy kostka jest lekko niesymetryczna – jedna ścianka (załóżmy, że „jedynka") wypada statystycznie nieznacznie częściej niż pozostałe. Załóżmy, że stanowi to 19% wszystkich wyników. Pozostałe ścianki wypadają statystycznie równo – po 16,2% (w przypadku kostki „sprawiedliwej" każda ze stron wypada statystycznie 16,(6)% ze wszystkich wyników).

Gracz wie o tej niesymetryczności i decyduje się podjąć grę. Dysponuje kwotą początkową 100 zł i nieustannie obstawia korzystną dla siebie „ściankę – jedynkę". Decyduje się na bezpieczną strategię gry. Stawia 1 zł na każdy zakład i w zależności od wyniku zyskuje 5 lub traci 1 zł.

Jeżeli rozegra 1 000 gier, to statystycznie rzecz biorąc, wygra średnio 190, a przegra 810 razy. Jego średni zarobek wyniesie 140 zł netto.

Gracz nasz mógłby wybrać inny wariant obstawiania – polegający np. na przeznaczaniu na następny zakład pewnego stałego procentu posiadanej kwoty. Jeżeli procent ten byłby wysoki, np. 50% – to jego zysk końcowy zdeterminowany byłby wynikami początkowych gier. Przy rozpoczynającym ciągu przeważających porażek straciłby znaczącą część kapitału, której nie zdążyłby w dalszej części gry odrobić. Zakończyłby wtedy grę poniżej kwoty początkowej 100 zł, mimo iż gra była dla niego korzystna.

Z kolei, przeznaczony na kolejne gry mały procent aktualnie posiadanego przez gracza kapitału, np. 2%, byłby strategią bezpieczną, jakkolwiek niekorzystną, jeśli chodzi o optimum zysku, jakie mógłby w niej uzyskać.

Powstaje pytanie: jak gracz powinien obstawiać (jaki procent posiadanego kapitału powinien przeznaczać na kolejne gry), aby zmaksymalizować swój zysk i jednocześnie zminimalizować ewentualna stratę?

Stwórzmy dla powyższej gry odpowiedni model matematyczny, starając się, aby dawał on rozwiązanie najbardziej korzystne finansowo.

Wprowadźmy parametr G, określający (przy liczbie rozgrywanych gier N dążącej do nieskończoności) średni wzrost kapitału gracza

$$G = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} u(x), \tag{2}$$

gdzie x to stosunek kapitału końcowego do początkowego. Formuła ta wynika z uwzględnienia dla naszego modelu stosownej funkcji użyteczności $u(x)$. Określa ona „subiektywne" zadowolenie gracza ze wzrostu jego kapitału względem wartości początkowej.

Funkcja taka, w rozważanej w naszym przypadku grze, powinna spełniać następujące założenia:

1 – być funkcją nieliniową (radość ze wzrostu naszego kapitału ze 100 do 1 000 jest większa niż ze wzbogacenia się z 1 000 100 do 1 001 000),

2 – być funkcją rosnącą (im więcej zysku, tym lepiej),

3 – dla argumentów bliskich zeru powinna być bardzo mała (wtedy gra staje się coraz bardziej nieopłacalna lub nawet niemożliwa),

4 – podwojenie kapitału gracza powinno dawać taką samą radość, bez względu na to, jaką kwotę podwoił.

Jedyną funkcją ciągłą, spełniającą te warunki, jest funkcja postaci $a \ln x + b$ ($a > 0$ i dowolne b).

Dla uproszczenia obliczeń możemy przyjąć $a = 1$ i $b = 0$. Nie wpływa to na wynik, a jedynie stanowi ustalenie rozważanej funkcji użyteczności $u(x)$ (nie mamy sprecyzowanej „subiektywnej" jednostki szczęścia, więc możemy takie uproszczenie zastosować).

Po zastosowaniu naszej funkcji użyteczności otrzymujemy

$$G = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left(\ln \frac{V_N}{V_0} \right), \tag{3}$$

gdzie V_0 – kapitał początkowy gracza, V_N – jego kapitał po N zakładach.

Jeżeli gracz zdecyduje się stawiać na każdy zakład odpowiednią, stałą część posiadanej kwoty pieniężnej f – to jego kapitał po N zakładach wynosić będzie

$$V_N = (1 + kf)^W (1 - f)^L V_0, \tag{4}$$

gdzie W, L to liczba odpowiednio zwycięstw i porażek podczas serii N $(= W + L)$ gier, k określa (przy danym prawdopodobieństwie) wypłatę za sukces – w naszej grze $k = 5$.

Podstawiając wyrażenie (4) do (3), otrzymujemy

$$G = \lim_{N \to \infty} \frac{W}{N} \ln(1 + kf) + \frac{L}{N} \ln(1 - f) = \\ = p \ln(1 + kf) + (1 - p) \ln(1 - f). \tag{5}$$

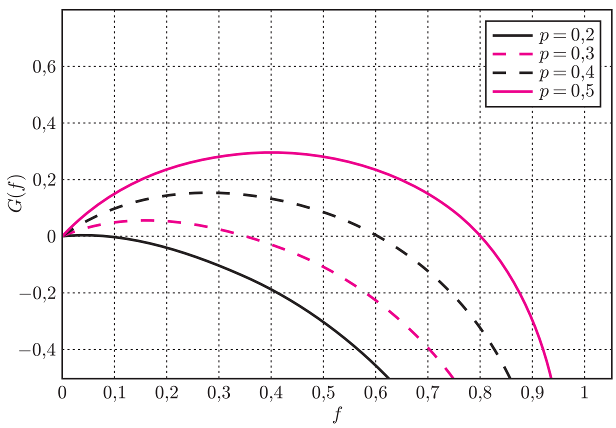
Znajdźmy teraz ekstremum tej funkcji ze względu na wartość parametru f, czyli rozwiążmy równanie:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}f} = 0. \tag{6}$$

Otrzymujemy maksimum funkcji (5) dla

$$f^* = \frac{(k+1)p - 1}{k}. \tag{7}$$

W naszym przypadku $k = 5$, $p = 0{,}19$ – czyli $f^* = 0{,}028$.



Oś odciętych wyraża współczynnik procentowego udziału aktualnie posiadanej kwoty pieniężnej w bieżącym zakładzie. Oś rzędnych reprezentuje wartości funkcji $G(f)$. Na wykresie zaobserwować możemy, że każda z tych funkcji, dla określonych prawdopodobieństw, ma swoje maksimum, które jest przedmiotem naszego zainteresowania.

Wracając do przypadku naszej gry, gracz powinien, na każdy z kolejnych zakładów stawiać 2,8% aktualnie posiadanego kapitału.

Tak więc, w pierwszej grze powinien postawić 2,8 zł. Jeżeli wygra – dysponować będzie kwotą 114 zł. W drugiej powinien postawić 2,8% · 114 zł = 3,19 zł. Jeżeli przegra, to jego kapitał wynosić będzie 110,81 zł. W trzeciej grze powinien postawić 2,8% · 110,81 zł = 3,10 zł itd.

Powiększy to jego kapitał po N grach średnio w razy, gdzie

$$w = \exp(NG(f^*)). \tag{8}$$

Obliczmy, ile statystycznie wynosić będzie jego kapitał po rozegraniu tysięcznej gry. Mamy

$$G(f^*) = 0{,}19 \ln(1 + 0{,}14) + 0{,}81 \ln(1 - 0{,}028) = \\ = 0{,}00189 \tag{9}$$

oraz

$$w = \exp(1\,000(0{,}00189)) = 6{,}63. \tag{10}$$

Jego średni kapitał (po rozegraniu tysięcznej partii) wyniósłby 100 zł · 6,63 = 663 zł. Na czysto zyskałby aż 563 zł!!!

Reasumując, przedstawiony tutaj na przykładzie prostej gry system optymalnego stawkowania znajduje swoją użyteczność tylko w przypadkach posiadania w grze statystycznie niewielkiej przewagi (gry z dodatnią wartością oczekiwaną, $f > 0$). W innych przypadkach jest on bezwartościowy (nawet w przypadku sprawiedliwej gry równych szans i wypłat $f = 0$).

Strategia taka może być za to stosowana w przypadku gry giełdowej (oczywiście po odpowiedniej modyfikacji). Przewaga, jaką tu mamy, to stosowna wiedza ekonomiczna.

Drugą dziedziną może być możliwość jej wykorzystania w sportowych grach bukmacherskich. O ile tutaj proponowane stawki na określone zdarzenia sportowe wyliczone są w specyficzny, korzystny dla bukmachera sposób, to po naszej stronie, jako hipotetyczną przewagę, mamy znajomość realiów sportowych rządzących daną dyscypliną.

Zdarzenia sportowe tak rozpatrywane można porównać do typowego rynku finansowego, w którym przedmiotem „analizy technicznej" są wyniki drużyn osiągane w aktualnie rozgrywanym sezonie.

[1] Epstein R. A., *The Theory of Gambling and Statistical Logic*, Academic Press, Inc. 1977.

[2] Thorp E. O., *The Kelly Criterion in Black Jack, Sports Betting and The Stock Market*, The 10th International Conference on Gambling and Risk Taking, Montreal, June 1997.