Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2005

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
495 ($WT = 2{,}50$) i **496** ($WT = 1{,}98$)
z numeru 2/2005

Tomasz Warszawski	– Kraków	44,86
Piotr Kumor	– Olsztyn	43,55
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	42,96
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	42,66
Jerzy Cisło	– Wrocław	40,29
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	39,35
Zbigniew Galias	– Kraków	38,09
Marcin Kasperski	– Warszawa	36,86

Oto i chwila okrągła, na którą czekaliśmy: liczba członków matematycznego Klubu 44 wreszcie wymaga trzech znaków w zapisie dziesiętnym. Z numerem setnym: Tomasz Warszawski.

Zadania z matematyki nr 507, 508

Redaguje Marcin E. KUCZMA

507. (a) Czy zbiór wszystkich liczb wymiernych większych od 1 można przedstawić jako sumę dwóch zbiorów rozłącznych A, B, co najmniej dwuelementowych tak, aby
- suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru A była elementem zbioru A oraz
- suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru B była elementem zbioru B?

(b) To samo pytanie, po zastąpieniu wyrażenia *suma dowolnych dwóch różnych liczb* przez *iloczyn dowolnych dwóch różnych liczb*.

508. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Boki AB, BC, CD, DA są do tego okręgu styczne odpowiednio w punktach K, L, M, N. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S. Wykazać, że
$$\frac{|KS|}{|MS|} = \frac{|AK|\cdot|BK|}{|AB|}\cdot\frac{|CD|}{|CM|\cdot|DM|}\,.$$

Zadanie 508 zaproponował pan Piotr Achinger z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2005

Przypominamy treść zadań:

503. Wyznaczyć najmniejszą liczbę dodatnią a, dla której zachodzi implikacja: Jeżeli funkcja $f\colon \langle 0;1\rangle \to \langle 0;\infty)$ spełnia warunki $f(1)=1$ oraz
$$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y) \qquad \text{dla } \ x\in\langle 0;1\rangle,\quad y\in\langle 0;1-x\rangle,$$
to $f(x)\leqslant ax$ dla $x\in\langle 0;1\rangle$.

504. Gra: odgadywanie liczby. Przeciwnik wybiera liczbę ze zbioru $\{0,1,\ldots,15\}$. Mamy prawo zadać 7 pytań, oczekując odpowiedzi *Tak* lub *Nie*. Przeciwnik na wszystkie pytania odpowiada; wolno mu przy tym skłamać, ale co najwyżej jeden raz. Podać taktykę gwarantującą prawidłowe rozpoznanie wybranej liczby.

503. Załóżmy, że funkcja f spełnia podane warunki. Jej wartości leżą w przedziale $\langle 0;1\rangle$, bowiem $1=f(1)\geqslant f(x)+f(1-x)\geqslant f(x)$. Jasne, że $f(0)=0$.

Skoro $f(x)\geqslant f(\frac12 x)+f(\frac12 x)=2f(\frac12 x)$, to przez indukcję wnosimy, że dla każdej liczby naturalnej n i dla $x\in\langle 0;1\rangle$ zachodzi nierówność $f(x)\geqslant 2^n f(2^{-n}x)$.

Ustalmy dowolną liczbę $x\in(0;1)$. Niech n będzie największą liczbą całkowitą, dla której $x\leqslant 2^{-n}$; tak więc $2^{-(n+1)}<x$. Ponieważ zaś $2^n x$ jest liczbą z przedziału $(0;1\rangle$, więc w myśl poprzedniej konkluzji $1\geqslant f(2^n x)\geqslant 2^n f(x)$.

Wobec tego $f(x)\leqslant 2^{-n}=2\cdot 2^{-(n+1)}<2x$. To znaczy, wobec dowolności wyboru x, że liczba $a=2$ spełnia postulowany warunek. Jest to najmniejsza taka liczba, o czym przekonuje przykład funkcji $f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\leqslant\frac12\,,\\ 1 & \text{dla } x>\frac12\,.\end{cases}$

504. Mamy ustalić cztery cyfry zapisu binarnego szukanej liczby. W pierwszych trzech pytaniach kolejno pytamy o pierwszą, drugą i trzecią cyfrę. Następnie zadajemy czwarte, kluczowe pytanie: *Czy już skłamałeś*?

Jeśli odpowiedź brzmi *Nie*, jest ona automatycznie prawdziwa. Zatem znamy już trzy cyfry. Pytamy trzykrotnie o czwartą cyfrę; zezwolenie na jednokrotne kłamstwo, którym przeciwnik dysponuje, nie pozwoli mu ukryć prawdy.

Jeżeli przeciwnik na czwarte nasze pytanie odpowiedział *Tak*, to znaczy, że skłamał albo wcześniej, albo w tym właśnie momencie. W każdym razie dalej już musi mówić prawdę; a my wiemy, że z rozpoznawanych wcześniej trzech cyfr, co najmniej dwie są rozpoznane dobrze. W dwóch dalszych pytaniach ustalamy prawidłowo całą tę trójkę, a w ostatnim pytaniu – czwartą cyfrę.

Klub 44

Zadania z fizyki nr 404, 405

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2005

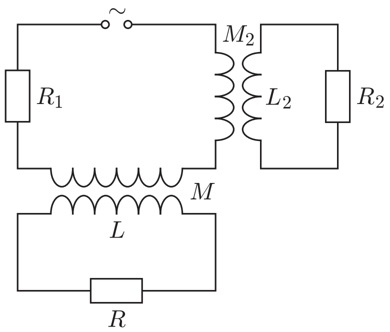
404. Istnieją dwa różne mechanizmy fizyczne i fizjologiczne dające efekt słyszenia przestrzennego (określania kierunku fali dźwiękowej), przy czym jeden z nich działa głównie dla częstotliwości powyżej około 5 kHz, a drugi głównie dla częstotliwości poniżej około 2 kHz. Na czym polegają te dwa mechanizmy i dlaczego mają ograniczone zakresy działania?

405. Opór przewodu na jednostkę długości jest równy ρ. Przewodem tym przesłano prąd na odległość l do odbiornika o oporze R, przy czym drugi przewód jest bezoporowy (można przyjąć, że jest nim ziemia). Obliczyć sprawność przesyłu energii, jeśli przewodnictwo między przewodami (odwrotność oporu) na jednostkę długości jest równe σ.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2005

Przypominamy treść zadań:

400. Dlaczego dźwięk słychać dalej w kierunku wiatru? (Oczywiście, prędkość wiatru jest mniejsza od prędkości dźwięku.)



401. Jak wiadomo, w Europie częstotliwość sieciowa wynosi 50 Hz, w USA zaś 60 Hz. Aby zrozumieć powód, dla którego niekorzystny byłby wybór częstotliwości znacznie większej lub znacznie mniejszej, rozważmy następujący model (rys.). Odbiornik energii (opornik R) jest dołączony do źródła napięcia przemiennego przez transformator o indukcyjności uzwojenia wtórnego L i współczynniku indukcji wzajemnej między uzwojeniami M. Ponadto w obwodzie występuje opornik R_1 odpowiadający oporności przewodów i uzwojenia transformatora oraz drugi transformator opisany parametrami L_2 i M_2, do którego dołączony jest opornik R_2. Ten drugi obwód symbolizuje prądy wirowe wzbudzane w przewodnikach, które przypadkiem znajdą się w pobliżu kabli doprowadzających energię do właściwego odbiornika.
a) Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby stosunek strat energii (łącznej mocy traconej na opornikach R_1 i R_2) do mocy dostarczanej do opornika R osiągał minimum dla pewnej częstotliwości?
b) Jeśli powyższy warunek jest spełniony, to jakim wzorem dana jest optymalna częstotliwość?

400. W układzie związanym z powietrzem dźwięk rozchodzi się izotropowo, czyli energia fali dźwiękowej rozkłada się równomiernie na powierzchni kuli. W kierunku wiatru dźwięk dotrze do wybranego miejsca na powierzchni ziemi szybciej, niż do miejsca równie odległego od źródła dźwięku, a leżącego po przeciwnej stronie. Promień odpowiedniej kuli będzie zatem mniejszy, a energia – mniej rozproszona.

401. Oznaczmy wartość skuteczną natężenia prądu płynącego przez R jako I, przez R_1 jako I_1, a przez R_2 jako I_2. Wartość skuteczna napięcia indukowanego we wtórnym uzwojeniu transformatora wynosi $I_1 M\omega$, co należy przyrównać do sumy napięć na indukcyjności L i oporze R, z uwzględnieniem przesunięcia fazy między tymi napięciami:

$$I_1 M\omega = I\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}, \quad \text{podobnie} \quad I_1 M_2\omega = I_2\sqrt{(L_2\omega)^2 + R_2^2}.$$

Moc przekształcana w ciepło na opornikach jest dana wzorami: $P = I^2 R$, $P_1 = I_1^2 R_1$ oraz $P_2 = I_2^2 R_2$. Szukany stosunek strat do mocy docierającej do odbiornika jest równy

$$\frac{P_1 + P_2}{P} = \frac{L^2\omega^2 + R^2}{M^2 R}\left(\frac{R_1}{\omega^2} + \frac{M_2^2 R_2}{L_2^2\omega^2 + R_2^2}\right).$$

Wyrażenie to traktowane jako funkcja zmiennej $x = \omega^2$ ma postać

$$y = A + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{Ex + F},$$

przy czym wszystkie parametry od A do F są dodatnie. Warunkiem istnienia minimum jest $CF > DE$, a wartość x_0 odpowiadająca minimum jest dana wzorem

$$x_0 = \frac{F\sqrt{B}}{\sqrt{CF - DE} - E\sqrt{B}}.$$

Jeśli to minimum ma występować dla dodatniej wartości x_0, to poprzedni warunek musi być zaostrzony do

$$CF - DE > E^2 B.$$

Powracając do pierwotnych zmiennych, należy podstawić

$$B = \frac{RR_1}{M^2}, \quad C = M_2^2 L^2 R_2, \quad D = M_2^2 R^2 R_2, \quad E = M^2 L_2^2 R, \quad F = M^2 R R_2^2.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
394 ($WT = 3{,}10$) i **395** ($WT = 1{,}51$)
z numeru 3/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	34,98
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	30,22
Konrad Kapcia	– Częstochowa	22,34
Mateusz Łącki	– Kraków	18,61
Tomasz Tkocz	– Rybnik	15,19
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	11,36