Ciągi jednomonotoniczne, funkcje supermodularne i nierówności

Lech STAWIKOWSKI[*]

O pochodnych cząstkowych i ich zastosowaniu pisaliśmy także w numerze 10/2004.

W „Kółku matematycznym dla olimpijczyków” Henryk Pawłowski zajmował się nierównościami typu

$$x^1_{(1)}x^2_{(1)}\ldots x^m_{(1)}+x^1_{(2)}x^2_{(2)}\ldots x^m_{(2)}+\ldots+x^1_{(n)}x^2_{(n)}\ldots x^m_{(n)}\geqslant$$
$$\geqslant x^1_1x^2_1\ldots x^m_1+x^1_2x^2_2\ldots x^m_2+\ldots+x^1_nx^2_n\ldots x^m_n\,, \tag{1}$$

gdzie ciągi $\left(x^j_{(i)}\right)^n_{i=1}$, dla $j=1,2,\ldots,m$, są ciągami jednomonotonicznymi (tzn. albo wszystkie są uporządkowane rosnąco, albo wszystkie malejąco), a ciągi $\left(x^j_i\right)^n_{i=1}$, dla $j=1,2,\ldots,m$ są ich permutacjami. Nierówność (1) można zapisywać symbolicznie w dogodniejszej, bo bardziej przejrzystej, postaci jako

$$\begin{bmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \ldots & x^1_{(n)}\\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \ldots & x^2_{(n)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x^m_{(1)} & x^m_{(2)} & \ldots & x^m_{(n)}\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix} x^1_1 & x^1_2 & \ldots & x^1_n\\ x^2_1 & x^2_2 & \ldots & x^2_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x^m_1 & x^m_2 & \ldots & x^m_n\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Widać, że przejście od nierówności (2) do (1) polegało na zastosowaniu operacji mnożenia wyrazów występujacych w kolumnach, a następnie zsumowaniu otrzymanych w ten sposób wyrażeń. To nasuwa myśl, żeby rozważyć ogólniejszą postać nierówności, tzn.

$$\begin{bmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \ldots & x^1_{(n)}\\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \ldots & x^2_{(n)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x^m_{(1)} & x^m_{(2)} & \ldots & x^m_{(n)}\end{bmatrix}_\varphi\geqslant\begin{bmatrix} x^1_1 & x^1_2 & \ldots & x^1_n\\ x^2_1 & x^2_2 & \ldots & x^2_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x^m_1 & x^m_2 & \ldots & x^m_n\end{bmatrix}_\varphi, \tag{3}$$

czyli

$$\varphi(x^1_{(1)},x^2_{(1)},\ldots,x^m_{(1)})+\varphi(x^1_{(2)},x^2_{(2)},\ldots,x^m_{(2)})+\ldots+\varphi(x^1_{(n)},x^2_{(n)},\ldots,x^m_{(n)})\geqslant$$
$$\geqslant\varphi(x^1_1,x^2_1,\ldots,x^m_1)+\varphi(x^1_2,x^2_2,\ldots,x^m_2)+\ldots+\varphi(x^1_n,x^2_n,\ldots,x^m_n). \tag{4}$$

Wiadomo już, że dla funkcji „iloczyn” nierówności te zachodzą. Powstaje pytanie, dla jakich innych funkcji φ będą one również spełnione.

Jeżeli chcemy znaleźć klasę funkcji spełniających nierówności (3) dla wszystkich n, przyjmijmy najpierw $n=2$. Dostaniemy warunek konieczny, jaki musi spełniać φ, który można zapisać w postaci

$$\varphi(\min\{x_1,y_1\},\ldots,\min\{x_m,y_m\})+\varphi(\max\{x_1,y_1\},\ldots,\max\{x_m,y_m\})\geqslant$$
$$\geqslant\varphi(x_1,\ldots,x_m)+\varphi(y_1,\ldots,y_m), \tag{i}$$

dla dowolnych ciągów x_i oraz y_j z dziedziny φ. Funkcje spełniające tę nierówność nazywa się supermodularnymi. Bez dowodu podam fakt, że dla funkcji klasy C^2 (tzn. dwukrotnie różniczkowalnych) powyższy warunek jest równoważny temu, że

$$\forall_{i,j\ (i\neq j)}\ \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\geqslant 0\,. \tag{ii}$$

Warunek ten ma w zastosowaniu przewagę, można z niego korzystać w sposób znacznie bardziej efektywny niż z warunku (i).

Okazuje się, że warunek (i) jest nie tylko konieczny, ale i wystarczający, aby zachodziły nierówności (3) dla wszystkich n. Załóżmy przeciwnie, że największą sumą, jaką można uzyskać przez permutacje ciągów $\left(x^j_{(i)}\right)^n_{i=1}$, dla $j=1,2,\ldots,m$, jest

$$\sum_{i=1}^n\varphi(x^1_i,\ldots,x^m_i)=\begin{bmatrix} x^1_1 & x^1_2 & \ldots & x^1_n\\ x^2_1 & x^2_2 & \ldots & x^2_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x^m_1 & x^m_2 & \ldots & x^m_n\end{bmatrix}_\varphi, \tag{5}$$

gdzie ciągi $\left(x^j_i\right)^n_{i=1}$, dla $j=1,2,\ldots,m$, nie są parami jednomonotoniczne.

Rozwiązanie zadania M 1112.
Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a+b+c$ jest najmniejszym spośród pięciu mianowników $e+a+b$, $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+e$, $d+e+a$. Wówczas

$$\frac{a}{e+a+b}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}\leqslant\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1\,. \tag{1}$$

Ponadto

$$\frac{d}{c+d+e}+\frac{e}{d+e+a}<\frac{d}{d+e}+\frac{e}{d+e}=1\,. \tag{2}$$

Dodając nierówności (1) i (2) stronami, uzyskujemy tezę.

[*] student, Międzywydziałowe Interdyscyplinarne Studia Matematyczno-Przyrodnicze, Uniwersytet Warszawski

Istnieją wówczas takie k, l $(1 \leqslant k < l \leqslant n)$, że ciągi (x_k^j, x_l^j), dla $j = 1, 2, \ldots, m$, nie są parami jednomonotoniczne. Wtedy jednak możemy je uporządkować tak, by były jednomonotoniczne. Na mocy warunku (i) po takiej permutacji suma $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i^1, \ldots, x_i^m)$ wzrośnie, bo wzrośnie $\sum\limits_{i=k,l} \varphi(x_i^1, \ldots, x_i^m)$. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, co dowodzi tego, że największa jest suma $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_{(i)}^1, \ldots, x_{(i)}^m)$.

Poniższe przykłady zilustrują, jak korzystać z nierówności (3). Ponieważ funkcje występujące w nich będą klasy C^2, to ich supermodularność najłatwiej będzie sprawdzić, korzystając z definicji (ii).

Przykład 1. *Wykazać, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$*

$$e^{{a_1}^2} + e^{{a_1}^2} + \ldots + e^{{a_n}^2} \geqslant e^{a_1 a_2} + e^{a_2 a_3} + \ldots + e^{a_n a_1}. \tag{6}$$

Łatwo sprawdzić (obliczając drugą pochodną cząstkową), że funkcja $\varphi(x, y) = e^{xy}$ jest supermodularna dla $x, y \geqslant 0$. W nierówności (3) przyjmujemy $m = 2$ oraz bierzemy za $\left(x_{(i)}^j\right)_{i=1}^{n}$, dla $j = 1, 2$, dwa identyczne ciągi liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Następnie permutujemy wyrazy drugiego z tych ciągów, przesuwając je cyklicznie o jeden.

Przykład 2. *Udowodnić, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność*

$$\frac{a}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{b}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} + \frac{c}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \tag{7}$$

Rozważmy funkcję $\varphi(x, y, z) = \dfrac{x}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$. Jest to funkcja supermodularna (w dziedzinie liczb rzeczywistych dodatnich). Wystarczy sprawdzić, że

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{z}\right)^2} \geqslant 0 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 2 \cdot \frac{x}{\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{z^2} \geqslant 0.$$

Nierówność (3) daje nam wobec tego dla tej funkcji

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}_{\varphi} \leqslant \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}_{\varphi}, \tag{8}$$

a to jest równoważne nierówności (7).

Przykład 3. *Udowodnić, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta ABC, to*

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{2}. \tag{9}$$

Łatwo sprawdzić, że $\varphi(x, y, z) = -\sin(x + y + z)$ jest funkcją supermodularną, gdy $0 \leqslant (x + y + z) \leqslant \pi$. Zachodzi więc nierówność

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} \\ \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} & \frac{\alpha}{6} \\ \frac{\gamma}{6} & \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} \end{bmatrix}_{\varphi} \leqslant \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} \\ \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} \\ \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} \end{bmatrix}_{\varphi}, \tag{10}$$

skąd można otrzymać żądaną nierówność (9).

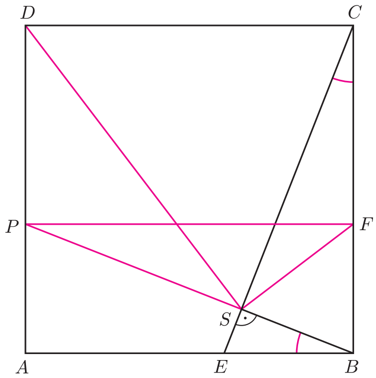
Przykład 4. *Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n > -1$ zachodzi*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i+1}}{2 + a_i + a_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + a_i}, \tag{11}$$

gdzie $a_{n+1} = a_1$.

Nierówność tę otrzymamy, jeśli rozważymy funkcję $\varphi(x, y) = -\dfrac{x + y}{1 + x + y}$, supermodularną dla $x, y > -1$. Wystarczy teraz skorzystać z nierówności (3) dla odpowiedniej permutacji ciągów $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Rozwiązanie zadania M 1113. Przyjmijmy, że proste BS i AD przecinają się w punkcie P.



Wówczas z równości $AB = BC$ oraz $\sphericalangle ABP = 90° - \sphericalangle SBC = \sphericalangle BCE$ wynika, że trójkąty ABP i BCE są przystające. Zatem $AP = BE = BF$, skąd wniosek, że czworokąt $CDPF$ jest prostokątem. Ponadto $\sphericalangle PSC = 90°$, więc punkty C, D, P, S, F leżą na jednym okręgu o średnicy DF. Stąd uzyskujemy ostatecznie, że $\sphericalangle DSF = 90°$.