**Rozwiązanie zadania M 1108.**
Pierwsze równanie mnożymy stronami przez $x_2$, drugie przez $x_3$, itd. Po dodatniu stronami tak uzyskanych zależności otrzymujemy

$$x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 + x_1^2 = 0\,.$$

Zatem $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, co jest jedynym rozwiązaniem danego układu równań.

# Potencjalni matematycy od 9 do 99 lat

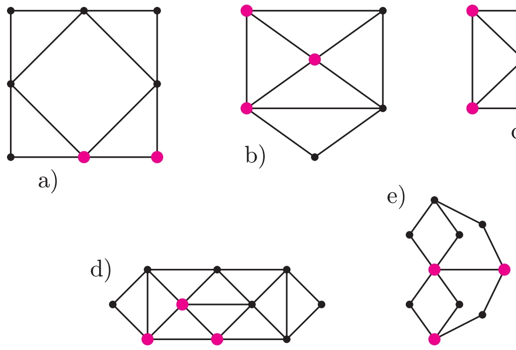
*Jean BRETTE*[*]

*Tłumaczył Wiktor BARTOL*

Między 11 i 17 października 2004 roku odbył się we Francji kolejny Festiwal Nauki, stworzony w 1992 roku przez ówczesnego Ministra ds. Badań Naukowych, Huberta Curiena. W trakcie Festiwalu naukowcy spotykali się z publicznością w laboratoriach (w ramach akcji „otwartych drzwi”), na wykładach, pokazach i publicznych debatach. Od 4 lat Ministerstwo zaprasza do udziału w Festiwalu jedno z państw europejskich (w 2004 zaproszenie otrzymała Polska) oraz około 30 organizacji pozarządowych. Goście eksponują swoją działalność naukową w *Miasteczku Nauki*.

W tym kontekście dział matematyki Pałacu Odkryć zaproponował widzom w wieku od 9 do 99 lat całą gamę gier i łamigłówek matematycznych, pokazywanych na stoisku „Expomaths”. Poniżej przedstawiamy kilka przykładów i zapraszamy Czytelnika do udziału w zabawie.

## Rysunki




Klasyczny problem: czy można wykonać rysunek *bez odrywania ołówka* i tak, by przez każdą kreskę przejść tylko raz?

Aby umożliwić uczestnikom powtarzanie prób, wycofywanie się z błędnych wyborów, nadaliśmy temu problemowi formę *materialną*. Każdy z rysunków został naniesiony na kartonową planszę. W kolorowych punktach wywiercono otwory, a w jednym z rogów planszy przywiązano sznureczek. W każdym wierzchołku rysunku umocowano śrubkę, dzięki czemu po przeciągnięciu sznurka przez wybraną dziurkę można dalej pokrywać nim linie narysowanej figury. Zadanie: spróbuj pokryć rysunek sznurkiem, tak aby każda kreska została pokryta dokładnie raz.

Opisane wyżej zadanie cieszyło się wielkim powodzeniem wśród dzieci ... i ich rodziców. Wszyscy poradzili sobie z przykładem (a) niezależnie od wyboru punktu początkowego, a także z przykładami (b) i (d), gdy odpowiednio wybierano punkt początkowy. Często natomiast uczestnicy przyznawali: „nie znaleźliśmy rozwiązania dla (c) i (e)”, co prowadziło do następującego dialogu:

– Ależ, droga Pani, nie prosiliśmy o znalezienie, a jedynie o spróbowanie!

– Aha, czyli to nie jest możliwe?

– A jak Pani sądzi?

– Myślę, że to niemożliwe.

– Jeśli tak, to jak się o tym przekonać?

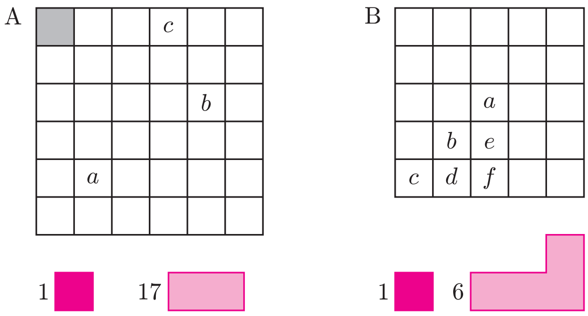
– Trzeba pewnie wypróbować wszystkie warianty? Ale to strasznie żmudne.

– Można i tak, ale Euler wymyślił bardzo proste i szybkie kryterium, które pozwala stwierdzić z całkowitą pewnością, jak to jest...

Wyjaśniliśmy tym, którzy chcieli posłuchać, rozumowanie Eulera i jego twierdzenie. Drogi Czytelniku, czy nie zechciałbyś sam poszukać odpowiedzi?

## Pokrycia

Pokazujemy dwa kwadraty podzielone na kratki.




**Zadanie A**: Umieść kolorowy kwadracik w kratce $a$, $b$, $c$, ... lub w jakiejkolwiek kratce białej. Czy potrafisz pokryć pozostałe białe kratki 17 kostkami domina?

*Uczestnicy znajdowali odpowiednie pokrycie, gdy kolorowy kwadracik przykrywał a lub c, mimo licznych prób nie udawało im się to natomiast, gdy przykrywali b.*

**Zadanie B**: Umieść kolorowy kwadracik w kratce $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ lub $f$. Czy potrafisz pokryć pozostałe białe kratki 6 kostkami w kształcie litery L?

*Uczestnicy znajdowali odpowiednie pokrycie, gdy kolorowy kwadracik przykrywał a lub c, mimo licznych prób nie udawało im się to natomiast w pozostałych przypadkach.*

Dialog, jaki towarzyszył tym próbom, wyglądał podobnie: pytaliśmy tylko „czy potrafisz?”, nie twierdziliśmy, że to możliwe! Nie wiem, jak to jest z uczniami w Polsce, ale we Francji wszyscy – lub

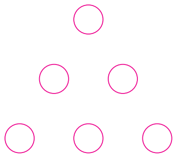
[*] Palais de la Découverte w Paryżu

prawie wszyscy – uczniowie są przekonani, że gdy dajemy im zadanie, to na pewno ma ono rozwiązanie. Ciekawe, prawda?

Jeśli jednak nie znajdujemy rozwiązania, to nie znaczy jeszcze, że go nie ma. Gra nie jest zakończona: trzeba jeszcze zrozumieć, dlaczego… jeśli jest się tym zainteresowanym, rzecz jasna! Powodzenia, drogi Czytelniku.

Proste rozumowanie pozwala rozstrzygnąć zadanie A. Takie samo rozumowanie daje odpowiedź w zadaniu B, gdy kolorowym kwadratem przykrywamy $d$ lub $e$. Nieco zmodyfikowane, ale oparte na tym samym pomyśle, rozwiązuje przypadek, gdy przykrywamy kratkę $b$. Niestety, gdy kolorowy kwadracik przykrywa $f$, nie umiem wymyślić niczego lepszego niż systematyczne badanie możliwości. Tak też się zdarza!

## Magiczne trójkąty



Uczestnik ma rozłożyć żetony ponumerowane od 1 do 6 na kółkach tworzących trójkąt, tak aby suma $S$ żetonów ułożonych wzdłuż każdego z boków była stała.

Zadanie nie jest skomplikowane, więc po kilku próbach nasz gość wstaje, oznajmiając: „gotowe, znalazłem rozwiązanie!" (Na przykład, łatwo znajdziemy odpowiedni układ ze stałą sumą $S = 9$, gdy umieścimy 1, 2, 3 w wierzchołkach trójkąta). Wtedy rozpoczynamy dialog:

– Świetnie. Jest Pan pewien, że nie ma innych rozwiązań?

– To są jeszcze inne?

– Nie wiem, pytam. Należałoby pewnie ustalić, co to znaczy „inne". Pytanie można by rozumieć tak: czy istnieją inne układy z tą samą sumą, ale inaczej rozmieszczonymi żetonami? A może należy je rozumieć tak: czy istnieją inne układy, z inną sumą?

– No tak… Można obrócić trójkąt. Żetony znajdą się w innych miejscach, ale suma pozostanie ta sama. Są zatem trzy rozwiązania.

– Jest Pan pewien?

– Eee… Nie: można jeszcze dodać układy symetryczne.

– A jak, Pana zdaniem, będzie z innymi sumami?

– Próbowałem z sumą 7, ale mi nie wyszło.

– Dlaczego właśnie 7?

– Dodałem wszystkie liczby od 1 do 6 i podzieliłem przez 3.

– A dlaczego wtedy nie ma rozwiązań?

– …Bo gdzieś trzeba umieścić 6, a najmniejszymi liczbami, jakie można do niej dodać, są 1 i 2.

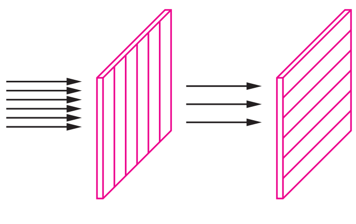
– Pomysł, by zacząć od poszukiwania możliwej sumy, był dobry. Co nie zadziałało?

– Zapomniałem, że wierzchołki trójkąta liczone są podwójnie, kiedy sumujemy liczby na każdym boku, itd.

Problem jest bardzo prosty, umożliwia jednak w ramach zajęć Pałacowych bardzo interesującą pracę z uczniami, poczynając od ośmiolatków. Uczestnicy szukają samodzielnie odpowiedzi i proponują swoje rozwiązania, które następnie są porównywane. Razem szukamy symetrii trójkąta równobocznego, zliczamy je; niektórzy starają się wyznaczyć sumę, inni działają metodą prób i błędów. Zdarzają się też taktyki zadziwiające: cytowany wyżej uczestnik pomyślał o obróceniu całego trójkąta, ale pewnego dnia jeden z uczniów zaproponował przemieszczenie każdej liczby o jedno miejsce wzdłuż obwodu trójkąta! Doprowadziło to do nowego rozwiązania, ku zdumieniu wszystkich (także mojemu – przez 30 sekund!). Pokazujemy też trójkąt o bokach złożonych z czterech kółek, w których należy rozmieścić liczby od 1 do 10. Dotychczasowe metody przestają działać, ale poszukiwanie sumy można uogólnić bez trudu, choć nie bez niespodzianek.

Proponujemy naszym gościom wiele różnych gier i łamigłówek, tak w samym Pałacu Odkryć, jak i w trakcie podobnych imprez, ale – prócz zabawy – chcemy tą drogą przekazać uczestnikom pewne myśli:

- Zadanie może mieć jedno rozwiązanie, może mieć wiele rozwiązań, może też nie mieć żadnego rozwiązania.
- Treść zadania może ukrywać zasadnicze pytanie; ujawnia się ono często w trakcie poszukiwań.
- Narzędzia, metody wypracowane w pewnym kontekście mogą okazać się przydatne w innych sytuacjach.
- Uprawianie matematyki to nieustanne zaspokajanie ciekawości: każda odpowiedź rodzi nowe pytania – i tak matematyka rozwija się od ponad 4000 lat!
- i tak dalej…



**Rozwiązanie zadania F 652.**
Każdy kolejny polaryzator osłabia natężenie światła $\cos^2 \frac{\pi}{2(N+1)}$ razy, z wyjątkiem pierwszego, który przepuszcza połowę padającego (niespolaryzowanego) światła: $I = \frac{1}{2} I_0 (\cos^2 \frac{\pi}{2(N+1)})^{N+1}$. Dla $N \to \infty$ mamy

$$I_\infty = \frac{1}{2} I_0 \lim_{N\to\infty} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{2(N+1)}\right)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2(N+1)}} \cdot (N+1) \cdot \sin \frac{\pi}{2(N+1)} \cdot \sin \frac{\pi}{2(N+1)}} = \frac{1}{2} I_0 \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^0 = \frac{1}{2} I_0$$

tak, jak dla pojedynczego polaryzatora.