Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2005

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
493 ($WT = 2{,}71$) i **494** ($WT = 1{,}43$)
z numeru 1/2005

Bartłomiej Dyda	– Wrocław	42,96
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	42,66
Tomasz Warszawski	– Kraków	40,38
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	39,35
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,07
Zbigniew Galias	– Kraków	38,09
Jerzy Cisło	– Wrocław	35,81

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 505, 506

Redaguje Marcin E. KUCZMA

505. Trójkąt równoboczny został podzielony prostymi równoległymi do jego boków na 36 trójkątów przystających. Linie podziału (wraz z bokami dużego trójkąta) tworzą siatkę, po której pełzają żuki; w chwili początkowej w każdym węźle siatki znajduje się jeden żuk. W jednostce czasu każdy żuk przemieszcza się z węzła siatki na węzeł sąsiedni, po czym zakręca w lewo lub w prawo o 60° lub 120°. Czy z tych warunków wynika, że w pewnym momencie dwa żuki spotkają się w jednym punkcie?

506. Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+a^3}\geqslant\frac{a+b+c+d}{3}.$$

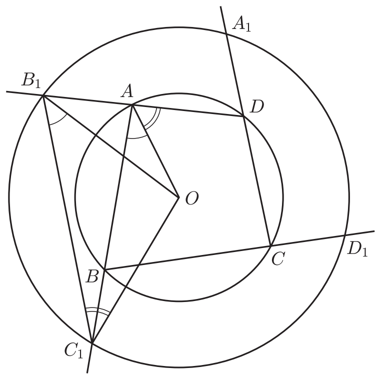
Zadanie 506 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2005

Przypominamy treść zadań:

501. Dane są dwa współśrodkowe okręgi o promieniach R, r $(R>r)$. Wypukły czworokąt $ABCD$ jest wpisany w mniejszy okrąg, a półproste $AB^{\to}$, $BC^{\to}$, $CD^{\to}$, $DA^{\to}$ przecinają większy okrąg odpowiednio w punktach C_1, D_1, A_1, B_1; przy tym stosunek obwodów czworokątów $A_1B_1C_1D_1$ i $ABCD$ wynosi R/r. Obliczyć te obwody.

502. Wykazać, że dla prawie wszystkich liczb naturalnych n istnieje przedstawienie liczby 1 w postaci sumy odwrotności sześcianów n liczb naturalnych.



501. Oznaczmy przez O wspólny środek danych okręgów. Długości boków i przekątnych czworokąta OAB_1C_1 spełniają nierówność Ptolemeusza

$$R\cdot|AC_1|\leqslant r\cdot|B_1C_1|+R\cdot|AB_1|.$$

Cykliczne przesunięcie oznaczeń (A,B,C,D) daje trzy analogiczne nierówności. Dodajemy je wszystkie stronami, przenosząc wyrażenia z czynnikiem R na jedną stronę:

$$R\cdot\Big(|AC_1|+|BD_1|+|CA_1|+|DB_1|-$$
$$-|AB_1|-|BC_1|-|CD_1|-|DA_1|\Big)\leqslant$$
$$\leqslant r\cdot\Big(|B_1C_1|+|C_1D_1|+|D_1A_1|+|A_1B_1|\Big).$$

Ponieważ $|AC_1|-|BC_1|=|AB|$ (itd.), uzyskana nierówność mówi, że

$$R\cdot\text{obwód}(ABCD)\leqslant r\cdot\text{obwód}(A_1B_1C_1D_1).$$

W myśl założenia, zachodzi tu równość. To znaczy, że czterokrotnie zastosowana nierówność Ptolemeusza była za każdym razem równością, czyli że czworokąty OAB_1C_1, OBC_1D_1, OCD_1A_1, ODA_1B_1 mają okręgi opisane. Dla czworokąta OAB_1C_1 otrzymujemy stąd równości kątów:

$$|\sphericalangle OAC_1|=|\sphericalangle OB_1C_1|,\qquad|\sphericalangle OAD|=|\sphericalangle OC_1B_1|.$$

Skoro zaś trójkąt OB_1C_1 jest równoramienny, te cztery kąty są równe, a więc półprosta $AO^{\to}$ połowi kąt DAB. Analogicznie, półproste $BO^{\to}$, $CO^{\to}$, $DO^{\to}$ są dwusiecznymi pozostałych kątów czworokąta $ABCD$, który wobec tego jest kwadratem wpisanym w okrąg o promieniu r. Jego obwód wynosi $4r\sqrt{2}$, a obwód większego czworokąta (który też jest kwadratem) jest równy $4R\sqrt{2}$.

502. Indukcja ze skokiem o 7: jeżeli da się przedstawić jedynkę jako sumę n ułamków

$$1=\frac{1}{x_1^3}+\ldots+\frac{1}{x_n^3},$$

to da się ją też przedstawić jako sumę $n{+}7$ takich ułamków:

$$1=\frac{1}{x_1^3}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}^3}+8\cdot\frac{1}{(2x_n)^3}\,.$$

Aby uzyskać tezę zadania, wystarczy wskazać siedem kolejnych liczb naturalnych, dla których istnieje żądane przedstawienie. Jeśli dla pewnych liczb całkowitych $x,y,z\geqslant 0$ zachodzi równość

$$1=x\cdot\left(\frac12\right)^3+y\cdot\left(\frac13\right)^3+z\cdot\left(\frac16\right)^3,$$

to liczba $n=x+y+z$ jest „dobra”. Biorąc jako (x,y,z) kolejno trójki $(7,2,11)$, $(4,13,4)$, $(5,9,9)$, $(2,20,2)$, $(6,5,14)$, $(3,16,7)$, otrzymujemy odpowiednio $n=20,21,23,24,25,26$; a dla $n=22$ mamy przedstawienie

$$1=6\cdot\left(\frac12\right)^3+16\cdot\left(\frac14\right)^3.$$

Start indukcji gotowy.

Klub 44

Zadania z fizyki nr 402, 403

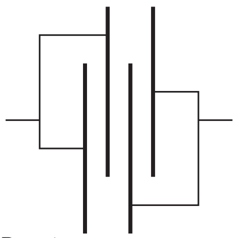
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2005

402. Samochód wyposażono w opony, których współczynnik tarcia statycznego wzdłuż kierunku jazdy wynosi (na pewnym ustalonym podłożu) $f_1 = 0{,}5$, w kierunku prostopadłym do kierunku jazdy $f_2 = 0{,}8$, a gdy siła tarcia jest skierowana pod kątem α względem kierunku jazdy, współczynnik tarcia statycznego jest dany wzorem $f = f_1 \cos^2\alpha + f_2 \sin^2\alpha$.

a) Jeśli samochód jedzie w stronę długiej prostopadłej ściany, to jak najlepiej uniknąć zderzenia: hamując wzdłuż linii prostej, czy skręcając bez hamowania?
b) Czy skręcając i jednocześnie hamując można uniknąć zderzenia lepiej (tzn. przy większej prędkości początkowej lub przy mniejszej odległości od przeszkody), niż w obu powyższych przypadkach?
c) Czy dobierając nacisk na hamulec i kąt skręcenia kierownicy tak, aby kąt α zmieniał się w czasie jazdy, można lepiej uniknąć zderzenia, niż dla stałej wartości α?

Porównanie dotyczy optymalnego wyboru w zakresie każdej z tych metod, tzn. najlepszego stałego kąta α i najlepszego przebiegu zmian tego kąta. Rozmiary samochodu należy uznać za małe w porównaniu z przebytymi odległościami.
W przypadku poślizgu siła tarcia silnie maleje, dlatego zakładamy, że hamowanie poślizgiem kontrolowanym nie będzie skuteczne.



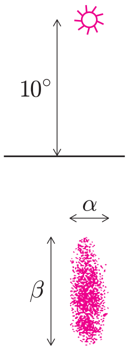
Rys. 1

403. Dwa jednakowe kondensatory płaskie o pojemności C połączono równolegle. Obliczyć pojemność tego układu kondensatorów, jeśli jedną z okładek jednego z nich wsunięto między okładki drugiego w połowie odległości między nimi, a powierzchnia części wsuniętej wynosi 2/3 całkowitej powierzchni okładki (rys. 1). Grubość okładek i efekty brzegowe (wynikające z ich skończonych rozmiarów) należy pominąć.

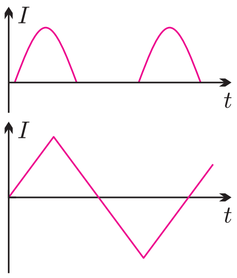
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2005

Przypominamy treść zadań:

398. Po jeziorze biegną liczne drobne fale, których kierunki zmieniają się dowolnie, a maksymalne nachylenie powierzchni wody wynosi $\gamma = 2^\circ$. Obserwujemy odbicie w wodzie Słońca, które jest na wysokości $\varphi = 10^\circ$ nad horyzontem. Ocenić rozmycie kątowe odbitego obrazu Słońca, wzdłuż osi „w poprzek" (kąt α na rysunku 2) i „wzdłuż" (kąt β).

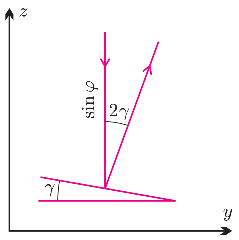


Rys. 2



Rys. 3

399. Amperomierz przeznaczony do pomiaru natężenia prądu zmiennego może działać na następujących zasadach: 1) mierzyć średnią wartość kwadratu natężenia prądu (poprzez np. pomiar siły wzajemnego oddziaływania dwóch cewek), 2) mieć wbudowany prostownik dwupołówkowy prądu i mierzyć amplitudę natężenia prądu wyprostowanego, 3) mieć wbudowany prostownik dwupołówkowy i mierzyć średnią wartość natężenia prądu wyprostowanego. Mamy trzy amperomierze A_1, A_2 i A_3 działające według powyższych zasad, przy czym skala wszystkich amperomierzy jest tak dobrana, że w przypadku prądu o przebiegu sinusoidalnym wskazują one wartość skuteczną natężenia. Jakie będą wskazania amperomierzy A_2 i A_3, jeśli amperomierz A_1 wskazuje 1 A, a prąd jest a) stały, b) o przebiegu jednopołówkowym (tzn. połowa sinusoidy, rys. 3), c) o przebiegu piłokształtnym (rys. 3)?



Rys. 4

398. Przyjmijmy kierunek osi z jako pionowy, a rzut obrazu Słońca na płaszczyznę poziomą niech leży na osi x. Przechył powierzchni wody w płaszczyźnie xz o kąt γ spowoduje zmianę kierunku promienia odbitego o 2γ, a ponieważ takie odchylenie może nastąpić zarówno w górę, jak i w dół, więc natychmiast otrzymujemy $\beta = 4\gamma = 8^\circ$.
Nieco trudniejsza jest analiza odchylenia poziomego.
W tym celu zrzutujmy na płaszczyznę yz jednostkowy wektor o kierunku promienia padającego i załóżmy, że powierzchnia wody jest nachylona w tej właśnie płaszczyźnie (zob. rys. 4). Długość rzutu jest równa $\sin\varphi$, a po odbiciu jego składowa wzdłuż osi y będzie – dla małych kątów γ – równa $2\gamma\sin\varphi$. Z drugiej strony, wizualne poszerzenie odbicia zgodne z rysunkiem 1 jest równoważne obróceniu promienia odbitego o kąt $(1/2)\alpha$ wokół osi z (jest to prawdą dla niezbyt dużych kątów φ). Ponieważ składowa wspomnianego wektora jednostkowego wzdłuż osi x wynosi $\cos\varphi$, więc po tym obrocie jego składowa wzdłuż osi y wyniesie $(1/2)\alpha\cos\varphi$ (dla małych kątów α). Z przyrównania $2\gamma\sin\varphi = (1/2)\alpha\cos\varphi$ znajdujemy $\alpha = 4\gamma\,\mathrm{tg}\,\varphi = 1{,}4^\circ$.

399. Pierwszy amperomierz wskazuje zawsze wartość skuteczną natężenia prądu, tzn. $I_1 = \sqrt{\overline{I^2}}$ (kreska nad symbolem oznacza średnią wartość). Drugi amperomierz wskazuje $I_2 = a|I|_{\max}$, gdzie stała a jest dobrana zgodnie z warunkiem dopasowania do sinusoidy, czyli $a = 1/\sqrt{2}$. Trzeci amperomierz wskazuje $I_3 = b\overline{|I|}$, a ponieważ średnia wartość dodatniej połówki sinusoidy o amplitudzie 1 wynosi $2/\pi$, więc $b = \pi/2\sqrt{2}$.

a) Dla prądu stałego otrzymujemy natychmiast $I_2 = 1/\sqrt{2}$ A $= 0{,}707$ A, $I_3 = \pi/2\sqrt{2}$ A $= 1{,}11$ A.

b) Dla przebiegu jednopołówkowego o amplitudzie I_0 średnia wartość kwadratu natężenia prądu obliczona dla „czynnej" połówki wynosi $\frac{1}{2}I_0^2$, czyli dla całego przebiegu $\overline{I^2} = I_0^2/4$. Stąd $I_1 = I_0/2$, czyli $I_0 = 2$ A, $I_2 = \sqrt{2}$ A $= 1{,}41$ A. Aby obliczyć I_3 zauważmy, że dla „czynnej" połówki średnia wartość natężenia prądu wynosi $\frac{2I_0}{\pi}$, czyli dla całego przebiegu $\overline{|I|} = I_0/\pi$. Podstawiając b i I_0 znajdujemy $I_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ A $= 0{,}707$ A.

c) Dla przebiegu piłokształtnego o amplitudzie I_0 średnia wartość kwadratu natężenia prądu wynosi $I_0^2/3$, więc $I_1 = I_0/\sqrt{3}$. Drugi amperomierz wskaże zatem $I_2 = \sqrt{3/2}$ A $= 1{,}22$ A. Ponieważ $\overline{|I|} = \frac{1}{2}I_0$, więc $I_3 = \frac{\pi}{4}\sqrt{3/2}$ A $= 0{,}962$ A.