Komety, trygonometria i komputer

Grzegorz SITARSKI

Kiedy chodziłem do gimnazjum, na lekcjach matematyki uczyliśmy się dowodzić tzw. tożsamości trygonometrycznych, np.

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 1 = 2\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Wychodząc z lewej strony powyższej równości, należało za pomocą przekształceń algebraicznych doprowadzić do postaci z prawej strony (albo odwrotnie). Trzeba było, oczywiście, znać kilka tożsamości podstawowych, w tym przypadku:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Mnóstwo takich ćwiczeń mieliśmy zadawane do domu, a wiązało się to głównie z doprowadzaniem wyrażeń matematycznych do tzw. postaci logarytmicznej, o czym teraz mówić nie będziemy.

Nie wiem, czy dziś też uczą w szkole takich rzeczy, bo przecież wystarczy wziąć kalkulator z funkcjami trygonometrycznymi i pokazać, że dla dowolnego kąta lewa strona tożsamości jest równa prawej (albo nie jest). Sądziłem dawniej, że był to tylko rodzaj gimnastyki umysłowej w praktyce do niczego nieprzydatnej. Okazuje się jednak, że w badaniach naukowych dotyczących ruchu komet zetknąłem się z problemem dowodzenia tożsamości trygonometrycznych i moja praktyka w tej dziedzinie, nabyta w szkole, bardzo mi się w czasach przedkomputerowych przydała.

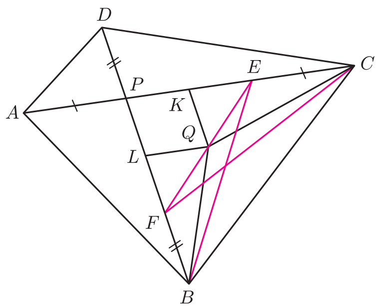
Ruch komety opisywany jest na orbicie okołosłonecznej, a obserwacje wykonywane są na Ziemi. Obliczenia ruchu komety prowadzone są zatem w innym układzie odniesienia niż obserwacje i dla porównania wyników obliczeń z obserwacjami trzeba dokonać przejścia z jednego układu do drugiego. W układzie orbitalnym podstawową płaszczyzną (x, y) jest płaszczyzna heliocentrycznej orbity komety, a podstawowym kierunkiem (osi x) jest kierunek na peryhelium orbity widziany ze Słońca. W układzie wykonywania obserwacji podstawową płaszczyzną jest płaszczyzna równika ziemskiego, a oś x jest skierowana do punktu równonocy wiosennej, tj. wzdłuż prostej przecięcia się płaszczyzny równika z płaszczyzną ekliptyki. Aby przeliczyć współrzędne jakiegoś wektora z układu orbitalnego do równikowego, trzeba pomnożyć je przez tzw. kosinusy kierunkowe, czyli kosinusy kątów między osiami obydwu układów. W tym celu dokonujemy czterech obrotów pierwszego układu na przemian wokół osi z i x o kąty ω, i, Ω oraz ε. Nie wnikając w znaczenie tych kątów, otrzymujemy ostatecznie wyrażenia trygonometryczne na kosinusy kierunkowe. Dla przykładu, kosinusy kierunkowe C_1, C_2, C_3 między osią x nowego układu a osiami x, y, z starego układu mają postać:

$$\begin{aligned} C_1 &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i,\\ C_2 &= \cos\varepsilon(\sin\omega\cos\Omega\cos i + \cos\omega\sin\Omega) - \sin\varepsilon\sin\omega\sin i,\\ C_3 &= \sin\varepsilon(\sin\omega\cos\Omega\cos i + \cos\omega\sin\Omega) + \cos\varepsilon\sin\omega\sin i. \end{aligned} \tag{1}$$

Wyrażenia (1) są dość skomplikowane, a nie mam żadnej pewności, czy przy ich wyprowadzaniu nie popełniłem błędu (bądź też nie przepisałem ich błędnie z podręcznika). Istnieje jednak możliwość sprawdzenia poprawności tych wyrażeń, bowiem wiemy z trygonometrii, że dla kosinusów kierunkowych musi zachodzić równość $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 1$. Nie jest to już tak prosta tożsamość, jak zadawane do domu w szkole, ale nie było rady, trzeba było podnieść do kwadratu prawe strony wyrażeń (1) i tak długo je przekształcać, aż wynik doprowadzi się do jedności. Jeśli się to nie udawało, trzeba było szukać błędu albo we wzorach (1), albo w procesie sprawdzania.

Dziś już nie trzeba się tak męczyć. Wystarczy napisać niewielki programik komputerowy i sprawdzić, czy dla dowolnych wartości kątów $\varepsilon, \omega, \Omega, i$ zachodzi $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 1$.

Rozwiązanie zadania M 1105. Przez punkt Q poprowadźmy prostą równoległą do prostej KL i przecinającą przekątne AC i BD odpowiednio w punktach E i F.



Wówczas punkty K i L są odpowiednio środkami odcinków PE i PF, skąd wniosek, że $AP = CE$ oraz $DP = BF$.

Odległość punktu Q od prostej BC jest średnią arytmetyczną odległości punktów E i F od prostej BC. Stąd uzyskujemy

$$[BCQ] = \tfrac{1}{2}([BCE] + [BCF]) = \tfrac{1}{2}([ABP] + [CDP]).$$

Grzegorz Sitarski, Centrum Badań Kosmicznych PAN

W miarę rozwoju badań nad kometami znowu natknąłem się na podobny problem trygonometryczny. Tym razem chodziło o składowe wektora siły niegrawitacyjnej działającej na lodowe jądro komety. Wyobraźmy sobie, że jądro komety jest kulą z lodowo-pyłowej mieszaniny, która pod wpływem promieniowania słonecznego zaczyna sublimować, co powoduje ulatnianie się gazów i pyłu, tworzących głowę i warkocz komety. Materia opuszczająca powierzchnię jądra wywołuje efekt odrzutu i w rezultacie wystąpienie wektora siły niegrawitacyjnej prostopadłego do powierzchni jądra. Wartość tej siły jest największa w punkcie podsłonecznym, czyli w tym miejscu na powierzchni jądra, gdzie na kometarnym niebie Słońce świeci w zenicie. Weźmy teraz pod uwagę ruchomy układ orbitalny, taki że kierunkiem podstawowym w płaszczyźnie orbity będzie kierunek na Słońce. Jak każde ciało niebieskie, jądro komety wiruje, a płaszczyzna równika jądra przecina płaszczyznę orbity pod jakimś kątem. Kiedy kometa biegnie po orbicie, punkt podsłoneczny wędruje w ciągu kometarnego roku od zwrotnika do zwrotnika po powierzchni jądra. Niezależnie jednak od położenia komety na orbicie wektor maksimum siły niegrawitacyjnej powinien zawsze być skierowany od Słońca, czyli w układzie orbitalnym powinien mieć tylko jedną składową, składową radialną. I tak by było, gdyby nie tzw. bezwładność cieplna, która powoduje, że na skutek ruchu wirowego jądra kierunek maksymalnego wyrzutu materii odchyla się nieco od kierunku radialnego. Powstaje problem znalezienia składowych wektora siły niegrawitacyjnej w układzie orbitalnym, czyli kosinusów kierunkowych między wektorem a osiami układu. Jeżeli η jest tzw. kątem opóźnienia, mierzonym od kierunku na Słońce wzdłuż równika jądra komety, I kątem między płaszczyznami równika i orbity, a λ kątem określającym położenie komety na orbicie (mierzonym od linii przecięcia się płaszczyzn równika i orbity), to kosinusy kierunkowe wektora siły niegrawitacyjnej będą równe:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \cos\eta + (1-\cos\eta)\sin^2 I \sin^2\lambda,\\
C_2 &= \sin\eta\cos I + (1-\cos\eta)\sin^2 I \sin\lambda\cos\lambda \\
C_3 &= [\sin\eta\cos\lambda - (1-\cos\eta)\cos I\sin\lambda]\sin I.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Chociaż mamy tu do czynienia tylko z trzema kątami, wyprowadzenie wzorów (2) wcale nie jest proste (pamiętam, że rysowałem sobie odpowiednie łuki na powierzchni jabłka!). A jak teraz sprawdzić poprawność tych wyrażeń? Oczywiście dla kosinusów kierunkowych musi zachodzić tożsamość $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 1$, ale sprawdzać w ten sposób wyrażenia (2) za pomocą przekształceń algebraicznych?! Nawet nie próbowałem, bo co zrobić potem z $\sin^4 I$ i $\sin^4\lambda$, które się pojawią? Sprawdzenie zrobił za mnie komputer i potwierdził poprawność wyprowadzonych wzorów.

Ale na tym nie koniec. Problem ogromnie się komplikuje, jeśli jądro komety jest spłaszczone i opiszemy jego kształt elipsoidą obrotową, której spłaszczenie oznaczymy przez $s = 1 - b/a$, gdzie b i a to odpowiednio biegunowy i równikowy promień jądra. Wektor siły niegrawitacyjnej jest nadal prostopadły do powierzchni jądra, ale wprowadziwszy pomocniczą wielkość $S = s(2-s)$, otrzymamy teraz następującą postać kosinusów kierunkowych:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= [\cos\eta + (1-S-\cos\eta)\sin^2 I\sin^2\lambda]/Z,\\
C_2 &= [\sin\eta\cos I + (1-S-\cos\eta)\sin^2 I\sin\lambda\cos\lambda]/Z,\\
C_3 &= [\sin\eta\cos\lambda - (1-S-\cos\lambda)\cos I\sin\lambda]\sin I/Z,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

gdzie $Z = \sqrt{1 - S(2-S)\sin^2 I\sin^2\lambda}$.

Nie zazdroszczę komuś, kto chciałby wykazać na drodze przekształceń algebraicznych, że dla wyrażeń (3) suma $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$ jest równa 1. Radzę napisać prosty program i komputer pokaże, że dla zupełnie dowolnych wartości η, I, λ i S (czy też s), nawet jeśli nie mają one znaczenia przyrodniczego, zawsze otrzymamy $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 1$.