Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2005

Przypominamy treść zadań:

396. Cylinder, do którego stałym strumieniem wlewa się woda, pełni funkcję zegara wodnego – na bocznej ściance naklejono pionowo skalę minutową. Czy jakieś inne przezroczyste naczynie o kształcie bryły obrotowej z pionową osią symetrii, po naklejeniu na nie tej samej skali, może pełnić rolę zegara? Skala powinna być umieszczona w jednej płaszczyźnie z osią symetrii. Grubość ścianki należy pominąć. Jeśli jest to możliwe, to narysować przekrój naczynia, na podstawie odpowiednich obliczeń numerycznych.

397. Rozważmy dwuwymiarowy model „atomu” składającego się z n „elektronów” odpychających się wzajemnie siłą Coulomba ($F = 1/r^2$), na które dodatkowo działa przyciągająca siła centralna ze strony nieruchomego „jądra”; siła ta powinna umożliwiać utrzymanie „elektronów” w stanie równowagi (np. niech ta siła będzie postaci $F = r^\beta$, gdzie $\beta > 0$). Zadanie polegało na numerycznym zbadaniu tych stanów równowagi, w zależności od liczby n (równej kilka-kilkanaście, maksymalnie około 50) oraz parametrów opisujących siłę centralną (w powyższym przykładzie β).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
392 ($WT = 2{,}13$) i **393** ($WT = 3{,}33$)
z numeru 2/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	33,16
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	26,54
Konrad Kapcia	– Częstochowa	20,83
Mateusz Łącki	– Kraków	17,70
Tomasz Tkocz	– Rybnik	10,58

Rozwiązanie zadania **397** zamieściliśmy na naszej stronie internetowej.

396. Objętość bardzo cienkiej warstwy wody w naczyniu jest równa

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \mathrm{d}h,$$

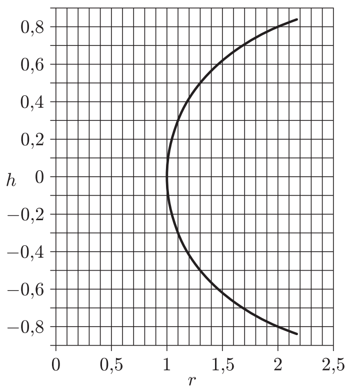
gdzie r jest promieniem przekroju poziomego naczynia na wysokości h. Niech $\mathrm{d}l$ będzie odcinkiem podziałki odpowiadającym wysokości $\mathrm{d}h$ – w takim razie $\mathrm{d}h = \mathrm{d}l \cos\alpha$ (gdzie α – kąt odchylenia tego odcinka od pionu), a ponieważ zgodnie z treścią zadania $\mathrm{d}V/\mathrm{d}l = \mathrm{const}$, więc kształt naczynia jest określony przez warunek

$$r^2 \cos\alpha = \mathrm{const} = c.$$

Ponieważ $\mathrm{d}r/\mathrm{d}h = \mathrm{tg}\,\alpha$, więc po prostych przekształceniach znajdujemy postać funkcji $h(r)$

$$h(r) = \int^r \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{r'^4/c^2 - 1}}.$$

Stałą c możemy położyć równą 1, gdyż odpowiada to przeskalowaniu funkcji $h(r)$ (jednakowej zmianie skali obu wielkości h i r). Otrzymaliśmy tzw. całkę eliptyczną. Wykres otrzymany na podstawie obliczeń numerycznych (dla dolnej granicy równej 1) jest podany na rysunku.



Rozwiązanie zadania F 649.
W układzie środka masy minimalna energia do zajścia reakcji to $E_1 = 2m_e c^2 + Mc^2$ (wszystkie cząstki po zajściu reakcji spoczywają). Niezmiennik czteropędu

$$\mu^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - \vec{p}_1^{\,2}$$

wynosi więc

$$\mu^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} = M^2c^2 + 4m_e^2 c^2 + 4Mm_e c^2,$$

ale z drugiej strony

$$\mu^2 c^2 = \frac{\left(Mc^2 + E_f\right)}{c^2} - \frac{E_f^2}{c^2} = M^2c^2 + 2E_f M,$$

gdzie E_f to energia fotonu, a $\frac{E_f}{c}$ to jego pęd. Wobec tego

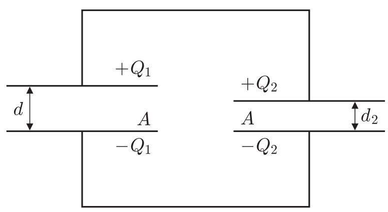
$$E_f = 2m_e c^2 + 2\frac{m_e}{M} m_e c^2.$$

Jest to właśnie minimalna energia fotonu dopuszczająca zajście procesu.

Rozwiązanie zadania M 1106.
Wszystkich niepustych podzbiorów danego zbioru dziesięcioelementowego jest $2^{10} - 1 = 1023$. Każdy z tych podzbiorów zawiera co najwyżej 10 liczb, z których żadna nie przekracza 100. A zatem suma liczb w każdym podzbiorze nie przekracza $10 \cdot 100 = 1000$. Stąd, na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, uzyskujemy tezę.

Rozwiązanie zadania F 650.
Zasada zachowania ładunku ma postać $Q_1 + Q_2 = 2Q$, a równość napięć na kondensatorach

$$\frac{Q_1 d}{A\epsilon_0} = \frac{Q_2 d_2}{A\epsilon_0},$$



zatem po rozwiązaniu

$$Q_1 = \frac{2d_2}{d + d_2}Q, \qquad Q_2 = \frac{2d}{d + d_2}Q.$$

Energia całkowita układu to

$$E = \frac{Q_1^2 d}{2A\epsilon_0} + \frac{Q_2^2 d_2}{2A\epsilon_0} = \frac{Q^2 d_2}{2A\epsilon_0}\left(\frac{4}{1 + d_2/d}\right).$$

Zauważmy, że energia zgromadzona na pojedynczym kondensatorze naładowanym do ładunku Q to

$$E_1 = \frac{Q^2 d_2}{2A\ \epsilon_0} < E.$$

Rozwinąwszy E w szereg Taylora wokół $d = d_2$ i pozostawiwszy tylko wyrazy liniowe w d_2/d, widzimy, że siła przyciągania okładek jest cztery razy większa niż w przypadku pojedynczego kondensatora.

Klub 44

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2005

Przypominamy treść zadań:

499. Dla ustalonej liczby naturalnej n rozważamy ciągi $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ spełniające warunki $a_0 = 0$ oraz $|a_k| = |1 + a_{k-1}|$ dla $k = 1, \ldots, n$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość sumy $a_1 + \ldots + a_n$.

500. Znaleźć taką liczbę naturalną n, że w każdym zbiorze n punktów kratowych na płaszczyźnie istnieje pięć punktów, których środek ciężkości jest punktem kratowym. Im mniejsza liczba n, tym lepszy wynik i wyższa ocena.

499. Oznaczmy sumę $a_1 + \ldots + a_n$ przez s_n. Zależność między a_k oraz a_{k-1} można zapisać tak:

$$a_k^2 = 1 + 2a_{k-1} + a_{k-1}^2.$$

Dodając stronami te równości dla $k = 1, \ldots, n$ oraz redukując składniki, które się pojawią po obu stronach, dochodzimy do zależności

$$a_n^2 = n + 2s_{n-1}, \qquad \text{czyli} \qquad (a_n+1)^2 = n + 1 + 2s_n.$$

Stąd

$$s_n = \frac{(a_n+1)^2 - (n+1)}{2} \geqslant -\frac{n+1}{2}.$$

Zatem wartość sumy s_n (będącej liczbą całkowitą) nie jest mniejsza od $-\lceil \frac{1}{2}n \rceil$. Jest to szukane minimum, osiągane dla ciągów $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ o wyrazach $a_k = \frac{1}{2}((-1)^k - 1)$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
491 ($WT = 1{,}14$) i **492** ($WT = 3{,}59$)
z numeru 12/2004

Józef Siwy	– Łaziska Górne	44,68
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	42,66
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	41,53
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	39,35
Zbigniew Galias	– Kraków	38,09
Piotr Kumor	– Olsztyn	37,78
Tomasz Warszawski	– Kraków	36,24
Marcin Kasperski	– Warszawa	34,88

Pan Józef Siwy uczestniczy z długimi przerwami, jego nazwisko jest więc rzadko widoczne w ogłaszanej czołówce. Ale oto zamknął drugą rundę (ciekawostka: pierwszą ukończył przeszło 20 lat temu!). Gratulujemy! i rozpoczynamy czekanie na trzecią.

500. Każdemu punktowi kratowemu przyporządkujmy parę reszt z dzielenia jego obu współrzędnych przez 5. Jest 25 możliwych par. Mając 101 punktów kratowych, można spośród nich wybrać 5 punktów wyznaczających tę samą parę reszt. Suma pierwszych współrzędnych tej piątki punktów oraz suma ich drugich współrzędnych są liczbami podzielnymi przez 5, czyli ich środek ciężkości jest punktem kratowym. Zatem liczba $n = 101$ ma żądaną własność.

Aby znaleźć mniejszą „dobrą” liczbę n, skorzystamy ze znanego twierdzenia (trójki autorów Erdős–Ginzburg–Ziv): *W każdym* $(2n-1)$*-elementowym zbiorze liczb całkowitych istnieje* n *liczb, których suma dzieli się przez* n.

Będzie nam ono potrzebne tylko w wersji dla $n = 5$; redukuje się ono wówczas do kilkuset przypadków, które oczywiście da się przebadać bezpośrednio. Ale można też uzyskać jego tezę dla $n = 5$ w sposób następujący:

Jeżeli α, β, γ, δ są liczbami niepodzielnymi przez 5, to wykreślając z sumy $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ pewne składniki (być może wszystkie, być może żadnego), jesteśmy w stanie uzyskać każdą z wartości 0, 1, 2, 3, 4 jako resztę z dzielenia sumy pozostałych liczb przez 5; nietrudne uzasadnienie tej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie.

Mamy wykazać, że wśród dziewięciu liczb całkowitych istnieje pięć o sumie podzielnej przez 5. Rozważamy reszty z dzielenia tych liczb przez 5: $0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_9 \leqslant 4$. Jeżeli istnieje pięć jednakowych wartości a_i, teza jest oczywista. W pozostałym przypadku następujące różnice są dodatnie: $a_6 - a_2 = \alpha$, $a_7 - a_3 = \beta$, $a_8 - a_4 = \gamma$, $a_9 - a_5 = \delta$. W myśl poprzedniej uwagi, możemy usunąć ze sumy $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ pewne składniki tak, by suma pozostałych przystawała (mod 5) do $-(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$. Dodajemy te pozostałe składniki do sumy $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ i wykonując oczywiste redukcje, otrzymujemy pięć liczb, których suma dzieli się przez 5.

Łatwo teraz wywnioskować, że rozważaną w zadaniu własność ma liczba $n = 41$: spośród danych 41 punktów kratowych wybieramy dziewięć o jednakowej (mod 5) pierwszej współrzędnej; wśród nich – na mocy wykazanego twierdzenia – znajduje się pięć punktów, których drugie współrzędne dają w sumie liczbę podzielną przez 5; ich środek ciężkości jest punktem kratowym.

Potrafimy jeszcze nieco zmniejszyć n metodami obliczeniowymi (na przykład $n = 33$ jest „dobre”). Niewymyślne algorytmy prowadzą jednak do ogromnej liczby przypadków. Jesteśmy przekonani, że zgrabne algorytmy i znacząco mniejsze „dobre” wartości n poznamy od uczestników konkursu. Innych Czytelników także zachęcamy do obliczeniowego zaatakowania problemu.

Jedno jest pewne: nie można zejść poniżej $n = 17$; bowiem wśród 16 punktów, których każda współrzędna jest równa 0, 1, 5 lub 6, nie ma pięciu punktów, których środek ciężkości byłby punktem kratowym.