Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\mathfrak{f}!} = 44$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
489 ($WT = 1{,}75$) i **490** ($WT = 2{,}61$)
z numeru 11/2004

Jerzy Witkowski	– Radlin	44,49
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	40,39
Tomasz Rawlik	– Brunszwik	38,21
Zbigniew Galias	– Kraków	36,95
Tomasz Warszawski	– Kraków	35,10
Marcin Kasperski	– Warszawa	34,88

To już czwarta czterdziestka-czwórka w wykonaniu Jerzego Witkowskiego.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

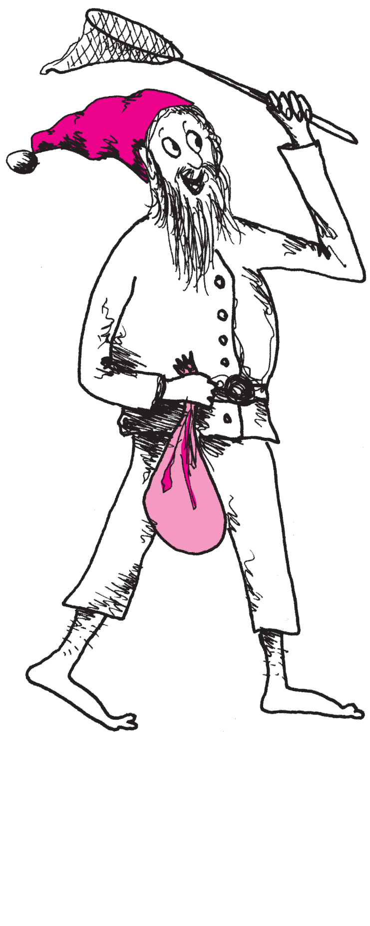
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2005

Przypominamy treść zadań:

497. Dane są liczby rzeczywiste a, b. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 6ab \\ x^3+y^3+z^3 &= 3(a^3+b^3) \end{cases}$$

498. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie n-wyrazowe ciągi $(a_1, \ldots, a_n)$, spełniające warunki:
- liczby a_i są całkowite, $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 1$;
- $a_1 + \ldots + a_n = 2n$;
- dla każdego układu wskaźników $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ (dla dowolnego k) suma $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$ jest różna od n.



497. Niech trójka (x,y,z) będzie rozwiązaniem. Podnosząc pierwsze równanie układu do potęgi drugiej i trzeciej, dostajemy związki

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0,$$

$$x^3+y^3+z^3+3[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)]+6xyz=0;$$

a zastępując $(x+y)$ przez $-z$ (itd.), mamy stąd

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=0.$$

Badany układ równań przybiera postać

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ xy+yz+zx &= -3ab \\ xyz &= a^3+b^3. \end{cases}$$

To znaczy, że (x,y,z) jest ciągiem wszystkich pierwiastków (z uwzględnieniem krotności) wielomianu

$$P(t) = t^3 - 3abt - (a^3+b^3).$$

Od razu widać, że $P(a+b)=0$, co pociąga rozkład na czynniki

$$P(t) = (t-a-b)[t^2+(a+b)t+(a^2-ab+b^2)].$$

Jedna z liczb x, y, z jest więc równa $a+b$, pozostałe dwie zaś są pierwiastkami trójmianu w nawiasie kwadratowym. Jego wyróżnik

$$\Delta = -3(a-b)^2;$$

stąd $a=b$ oraz

$$P(t) = (t-2a)(t+a)^2.$$

Dostajemy odpowiedź: jeżeli $a \neq b$, wyjściowy układ równań nie ma rozwiązania rzeczywistego; a jeżeli $a=b$, to rozwiązaniami są trójki $(2a,-a,-a)$, $(-a,2a,-a)$, $(-a,-a,2a)$.

498. Weźmy dowolny ciąg $(a_1,\ldots,a_n)$ spełniający podane warunki. Jeżeli $a_1 > n$, to $(a_1,\ldots,a_n) = (n+1,1,1,\ldots,1)$ – i jest to dobry ciąg. Jeżeli $a_n > 1$, to $(a_1,\ldots,a_n) = (2,2,\ldots,2)$ – i jest to także dobry ciąg, pod warunkiem, że n jest liczbą nieparzystą. Dalej zakładamy, że $a_1 \leqslant n$, $a_n = 1$.

Oznaczmy $s_k = a_1 + \ldots + a_k$ i niech m będzie największym numerem, dla którego $s_m \leqslant n$. Liczba n jest (z założenia) różna od sumy dowolnie wybranych wyrazów a_i, więc $n \neq s_m$ oraz $n \neq s_m + a_n = s_m + 1$; zatem $s_m \leqslant n - 2$. Skoro zaś $s_{m+1} > n$, to $a_{m+1} > 2$.

Przyjmijmy, że ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ ma na końcu x jedynek, a przed nimi y dwójek ($x > 0$, bo $a_n = 1$). Tak więc

$$2n = \sum a_i \geqslant x + 2y + 3(n - x - y),$$

skąd $2x + y \geqslant n$. Mamy też nierówność

$$n - s_m < s_{m+1} - s_m = a_{m+1} \leqslant a_m \leqslant s_m,$$

z której wynika, że $s_m > \frac{1}{2}n$, więc

$$n - s_m < \frac{n}{2} \leqslant \frac{2x+y}{2} \leqslant x + 2y.$$

Wcześniej stwierdziliśmy, że $a_{m+1} > 2$. To znaczy, że wśród składników sumy $s_m = a_1 + \ldots + a_m$ nie ma wyrazów $a_i \leqslant 2$. Mamy w takim razie do dyspozycji wszystkie x jedynek i y dwójek, z których można zbudować każdą liczbę mniejszą od $x + 2y$. W szczególności liczba $n - s_m$ daje się przedstawić jako suma pewnej ilości jedynek i dwójek, będących wyrazami ciągu (a_i). Tym samym liczba n okazuje się być równa sumie pewnych wyrazów a_i, wbrew postawionemu warunkowi.

Wniosek: jedynymi dobrymi ciągami $(a_1, \ldots, a_n)$ są te wspomniane na początku rozwiązania.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
390 ($WT = 2{,}20$) i **391** ($WT = 3{,}18$)
z numeru 1/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	31,25
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	26,54
Konrad Kapcia	– Częstochowa	17,65
Mateusz Łącki	– Kraków	17,27

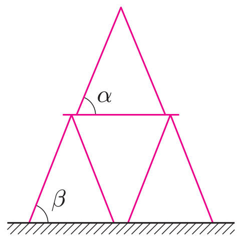
Klub 44

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2005

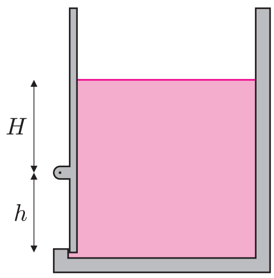
Przypominamy treść zadań:

394. Z siedmiu kart do gry zbudowano „domek” (zob. rys. 1). Jeśli współczynnik tarcia kart o stół i o siebie nawzajem jest równy $\mu = 0{,}25$, to jaka jest minimalna wartość kąta α między górnymi kartami a poziomem? Jaka jest minimalna wartość kąta β między dolnymi kartami a poziomem? Zakładamy, że kąt α jest jednakowy dla obu górnych kart, a kąt β – jednakowy dla czterech dolnych.



Rys. 1

395. Automatyczna spłuczka zawiera zbiornik, którego ścianka boczna może się obracać bez oporu wokół ustalonej osi (rys. 2). Jeśli wysokość ścianki poniżej osi obrotu jest równa h, to do jakiej wysokości H powyżej osi musi się nalać woda, aby ścianka się obróciła i zbiornik uległ opróżnieniu?

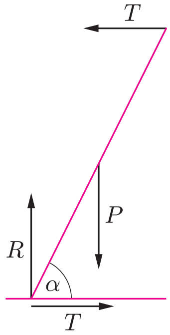


Rys. 2

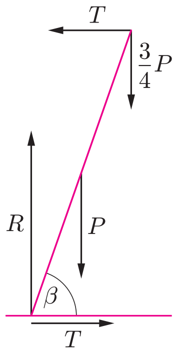
394. Na górną kartę działają cztery siły (rys. 3) – siła ciężkości P zaczepiona w jej środku, siła reakcji $R = P$, siła tarcia T i równoważąca ją siła ze strony drugiej górnej karty, którą dla uproszczenia oznaczymy także T. Rozpatrując momenty sił względem punktu podparcia, stwierdzamy, że warunkiem równowagi jest

$$P \cos\alpha = 2T \sin\alpha, \text{ czyli } \operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{2T} = \frac{1}{2\mu}.$$

Na każdą z dolnych kart działa dodatkowo czwarta część ciężaru trzech leżących na nich kart (rys. 4), a stąd wyliczamy $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{5}{7\mu}$. Wartości liczbowe wynoszą $\alpha = 63{,}4°$, $\beta = 70{,}7°$.



Rys. 3



Rys. 4

395. Ścianka się obróci, gdy całkowity moment działającej na nią siły parcia względem osi stanie się równy zeru, tzn.

$$\int_{-h}^{H} p h' \mathrm{d}h' = 0.$$

Zmienna h' jest wysokością mierzoną od osi w górę, a ciśnienie p jest proporcjonalne do głębokości $H - h'$. Zatem

$$\int_{-h}^{H} (H - h') h' \mathrm{d}h' = 0.$$

Scałkowanie daje nam równanie $H^3 = 3Hh^2 + 2h^3$, czyli $H = 2h$.