Gęstość ciągów liczbowych

Jarosław GÓRNICKI

Porównywanie obiektów może być trudne. Często wynik zależy od wybranej metody. Zjawisko to zilustrujemy, porównując wielkości zbiorów, których elementami są liczby naturalne.

Liczby parzyste są podzbiorem właściwym zbioru liczb naturalnych. Z tego punktu widzenia (relacji zawierania) zbiór liczb parzystych jest *mniejszy* od zbioru liczb naturalnych. Możliwość stosowania tej relacji jest jednak bardzo ograniczona. Na przykład zbiory $U = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\}$ oraz $V = \{1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots\}$ nie są w tym sensie porównywalne.

Można jednak na zbiory U i V spojrzeć inaczej. Gdyby przynajmniej jeden z nich miał skończoną ilość elementów, to za *większy* zbiór można by uznać ten, który ma więcej elementów. Nietrudno jednak zauważyć, że zbiory U i V są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych, mają więc tyle samo elementów i można je uznać za *równe*. Takie podejście nie pozwala więc rozróżniać zbiorów przeliczalnych.

Opiszemy więc inne sposoby porównywania wielkości zbiorów (ciągów) złożonych z liczb naturalnych. Zaznaczając na osi liczbowej elementy zbioru U oraz zbioru liczb parzystych, zauważamy, że elementy zbioru U (w przeciwieństwie do liczb parzystych) pojawiają się coraz rzadziej. Przyjmijmy zatem, że *ten ciąg będzie większy, którego elementy będą gęściej rozmieszczone w zbiorze liczb naturalnych.* Problemem jest podanie zasad określania gęstości rozmieszczenia elementów danego zbioru w zbiorze liczb naturalnych i jej liczbowej charakteryzacji.

Propozycja jest następująca. Określmy tzw. *funkcję gęstości* $d : 2^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ poprzez następujące cztery własności:

1) gęstość zbioru liczb naturalnych jest równa 1;
2) gęstość dwóch rozłącznych zbiorów jest równa sumie gęstości tych zbiorów;
3) przesunięcie dowolnego zbioru nie zmienia jego gęstości: $d(A) = d(A + 1)$, gdzie $A + 1 = \{y : y = x + 1, x \in A\}$;
4) rozrzedzenie dowolnego zbioru zmniejsza jego gęstość: $d(sA) = \frac{1}{s}d(A)$, gdzie $sA = \{y : y = sx, x \in A\}$ dla $s \in \mathbb{N}$.

Korzystając z własności 1–4, nietrudno wykazać, że gęstość zbiorów skończonych jest równa zeru. Wynika stąd już łatwo, że funkcja gęstości nie jest miarą na zbiorze liczb naturalnych (zbiór wszystkich liczb naturalnych ma gęstość 1, a jest sumą przeliczalnej rodziny rozłącznych zbiorów jednopunktowych o gęstości 0).

W oparciu o metody matematyki wyższej łatwo wskazać przykład funkcji gęstości. Mianowicie funkcja dana wzorem

$$(*) \qquad d(A) = Lim_{n\to\infty} \frac{\#(A \cap [1, n])}{n},$$

gdzie symbol *Lim* oznacza uogólnioną granicę Banacha, symbol $\#X$ zaś oznacza liczbę elementów zbioru X, jest funkcją gęstości.

O związku funkcji gęstości z miarą, czyli prawdopodobieństwem, oraz o uogólnionej granicy Banacha, jest mowa w artykule Michała Adamaszka w tym numerze *Delty* na str. 10–11.

Na szczęście możliwe jest efektywne stosowanie wzoru $(*)$. Z określenia uogólnionej granicy Banacha wynika, że jest ona równa zwykłej granicy, o ile ta ostatnia istnieje. Korzystając z tego, można wykazać, że zbiór

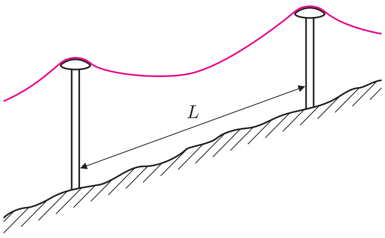
$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, \ldots\}$$

wszystkich liczb bezkwadratowych (tj. liczb naturalnych niepodzielnych przez kwadrat liczby większej od 1) ma gęstość $d(B) = 6/\pi^2$.

Inny sposób wykorzystania wzoru $(*)$ opiera się na następującej obserwacji.

Lemat. Jeżeli ciąg rosnący liczb naturalnych $A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\}$ spełnia warunek $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{a_k} = q$, to $d(A) = q$.

Rozwiązanie zadania F 647.
Lina kolejki podparta jest w regularnych odstępach na słupach.



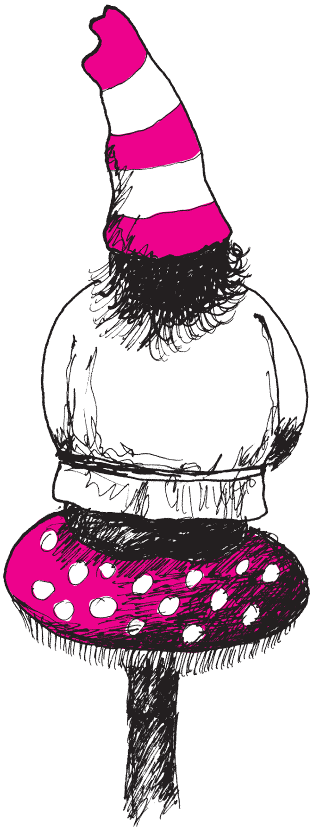
Jeśli lina nie porusza się, możliwe jest wzbudzenie w niej drgań o długości równej $\frac{2L}{n}$, gdzie n to liczba naturalna. Zamocowania liny (węzły drgań) znajdują się w takim przypadku na słupach. Jeśli jednak porusza się, pojawia się dodatkowe tłumienie, wynikające z tego, że miejsce styku liny zmienia się i wszelkie wzbudzone drgania szybciej zanikają.

Rozwiązanie zadania M 1103.
Przypuśmy, że $p_{n+1} = 5$ dla pewnego n. Oznacza to, że istnieją takie liczby całkowite nieujemne a, b, c, że

$$p_1p_2 \ldots p_n + 1 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c.$$

Stąd oraz z równości $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ wynika, że $a = 0$, $b = 0$. Wtedy liczba $p_1p_2 \ldots p_n = 5^c - 1$ jest podzielna przez 4. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż $p_1 = 2$, a pozostałe wyrazy ciągu (p_n) są liczbami nieparzystymi.

Jarosław Górnicki, Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska



Dowód. Jeśli $k = \#(A \cap [1, n])$, to $a_k \leqslant n < a_{k+1}$. Z ostatniej nierówności wynika, że

$$\frac{k}{a_{k+1} - 1} \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \frac{k}{a_k}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{a_{k+1}-1} = q$, więc $d(A) = q$.

Korzystając z tego lematu, obliczamy gęstość zbiorów U oraz V: $d(U)=d(V)=0$. Prostymi przykładami zbiorów o niezerowej gęstości są ciągi arytmetyczne

$$A = \{a_k = ak + r : k = 0, 1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{N}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{ak+r} = \frac{1}{a}$, więc $d(A) = 1/a$.

Wyznaczymy teraz gęstość zbioru wszystkich liczb pierwszych $P = \{p_1 < p_2 < p_3 < \ldots\}$, którego rozmieszczenie w zbiorze liczb naturalnych odznacza się dużą chaotycznością i wciąż jest dla nas mało znane. Z twierdzenia o liczbach pierwszych J. Hadamarda – C. de la Vallée Poussina (z 1896 roku) wiadomo, że $\pi(n) \approx n \ln n$, gdzie $\pi(n)$ to liczba liczb pierwszych niewiększych od n. Wobec tego

$$d(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Niech z_n oznacza liczbę przedstawień n jako sumy liczb naturalnych ustawionych w porządku niemalejącym. Utwórzmy zbiór

$$Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, \ldots\}.$$

Choć nie znamy prostego i ścisłego wzoru na z_n, to istnieje zadziwiający wzór na przybliżenie tej liczby, podany w 1918 roku przez G.H. Hardy'ego i S.S. Ramanujana:

$$z_n = \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Korzystając z tego przybliżenia, obliczamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{z_n} = 0$, więc $d(Z) = 0$.

Podobnie rzecz ma się z ciągiem Fibonacciego (opisanym w 1228 roku)

$$F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\},$$

którego kolejne wyrazy dane są formułą rekurencyjną: $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Korzystając ze wzoru Bineta

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\} \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}},$$

gdzie $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, obliczamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$. Zatem $d(F) = 0$.

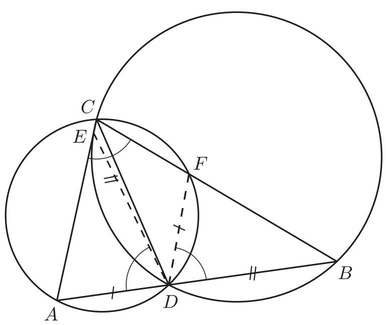
Na zakończenie wspomnijmy jeszcze o innym wprowadzeniu gęstości podanym przez L.G. Schnirelmana w 1930 roku. Gęstością Schnirelmana zbioru $A \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy liczbę

$$D(A) = \inf_{n\geqslant 0} \frac{\#(A \cap [0, n])}{n}.$$

Pojęcie to wykorzystywane było w badaniu tzw. sumy kompleksowej zbiorów A i B tzn. zbioru $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Wyznaczenie sumy kompleksowej nawet prostych zbiorów jest zazwyczaj dość trudne. Schnirelman wykazał, że $D(P + P) > 0$. Ponieważ z własności uogólnionej granicy Banacha wynika, że $d(A) \geqslant D(A)$, więc zbiór $P + P$ (czyli zbiór liczb parzystych, które można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych) ma dodatnią gęstość, tj. $d(P + P) > 0$. Rezultat ten gwarantuje, że słynna hipoteza Goldbacha z 1742 roku (HG: każdą parzystą liczbę naturalną większą od 2 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych) sprawdza się w nieskończenie wielu przypadkach (nawet zachodzi „z dodatnią częstością"). Ale czy we wszystkich? – tego nie wiemy do dziś.

Badania nad gęstością ciągów są pomocne przy analizie pewnych zagadnień matematycznych. Jest to dobrze widoczne w teorii liczb czy analizie funkcjonalnej. Omówienie tej problematyki (pokazującej, co może mały zbiór) wykracza jednak poza ramy tej prezentacji.

Rozwiązanie zadania M 1102.
Ponieważ prosta CD jest dwusieczną kąta ACB, więc $DA = DF$.



Analogicznie mamy $DE = DB$. Ponadto $\sphericalangle BDF = \sphericalangle ECF = \sphericalangle EDA$. Uzyskane równości dowodzą, że trójkąty ADE i FDB są przystające, skąd $AE = BF$.