Czasoprzestrzeń

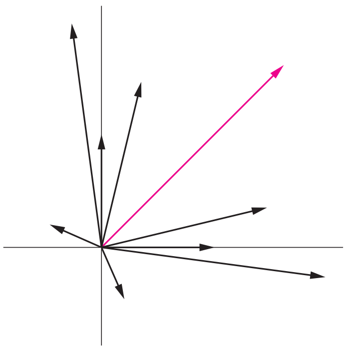
czyli geometryczny odpowiednik szczególnej teorii względności, to dzieło Hermanna Minkowskiego (1864–1909), u którego zresztą Einstein studiował na politechnice w Zurichu. Pierwsza publikacja na ten temat ukazała się w 1909 roku i to tak nieszczęśliwie, że zmarły nagle Minkowski jej nie zobaczył.

Proponuję przyjrzenie się temu pomysłowi od strony geometrycznej i to w najprostrzym przypadku, gdy jest to czasoprzestrzeń dwuwymiarowa. Ma to być geometria, więc (przynajmniej na początku) nie będzie mowy o żadnym czasie.

Geometria czasoprzestrzeni, to – oczywiście – geometria nieeuklidesowa, zatem nie wszystkie z postulatów Euklidesa są w niej prawdziwe. Wiemy, że pierwsza geometria nieeuklidesowa powstała przez zaprzeczenie piątego postulatu, który mówił o równoległych. W czasoprzestrzeni postulat piąty jest spełniony. Geometrię czasoprzestrzeni otrzymuje się przez zaprzeczenie postulatu czwartego, który orzeka:

(IV – Euklides) *wszystkie kąty proste są równe.*

Jak mogą wyglądać nierówne kąty proste?



Rys. 1

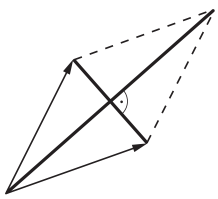
Zauważmy najpierw, że skoro z równoległością jest tak, jak w naszej geometrii, więc w czasoprzestrzeni możliwe są takie same przesunięcia, jak w geometrii szkolnej.

Z prostopadłością musi jednak być jakoś inaczej, niż jesteśmy przyzwyczajeni. Wprowadźmy więc układ współrzędnych. W zwykłej geometrii wektory $[a_1, a_2]$ i $[b_1, b_2]$ są prostopadłe, gdy $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$. W czasoprzestrzeni będą one prostopadłe, gdy

(1) $$a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 = 0.$$

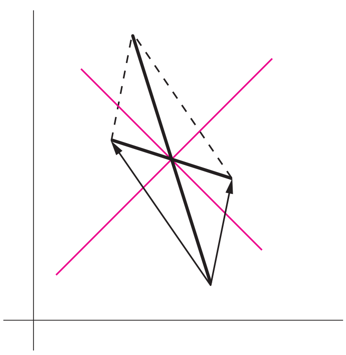
Ta minimalna zmiana daje właśnie to, o co chodzi. Teraz do dowolnego wektora $[p, q]$ jest prostopadły wektor $[q, p]$. Rysunek 1 pokazuje, co się stało: każda para strzałek jednakowej długości to wektory prostopadłe. Kąty proste nie są więc równe – są większe i mniejsze takie kąty. Ale najciekawsza jest strzałka kolorowa: ona jest prostopadła sama do siebie! Faktycznie proste sprawdzenie pokazuje, że każdy wektor $[p, p]$ jest prostopadły sam do siebie podobnie, jak i każdy wektor $[p, -p]$. Wektory (i proste) o takich kierunkach nazywają się *izotropowe*. Pojęcie to pozwala wyrazić (1) geometrycznie:

kąt jest prosty, gdy ma izotropową dwusieczną.



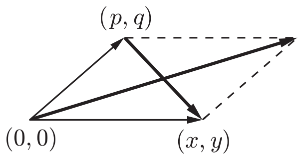
Rys. 2

Mimo zaskoczenia okazuje się to zupełnie dobrym warunkiem, np. na płaszczyźnie proste, mające wspólną prostopadłą, są równoległe.



Rys. 3

Każdy wie, jak za pomocą prostopadłości określić równość odcinków, szczególnie, gdy można je przesuwać: zsuwamy je, by miały wspólny koniec, potem robimy z nich równoległobok i sprawdzamy, czy jest rombem, czyli **czy ma prostopadłe przekątne**! Rysunek 2 pokazuje to w przypadku euklidesowym, a 3 w przypadku czasoprzestrzeni. Ten drugi przypadek wydaje się jakiś dziwny, więc naturalnie nasuwa się pytanie o to, jak wobec tego w czasoprzestrzeni wyglądają okręgi.



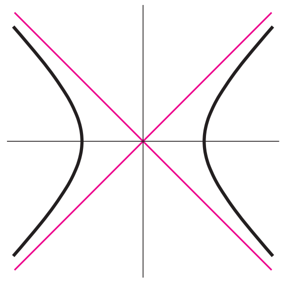
Rys. 4

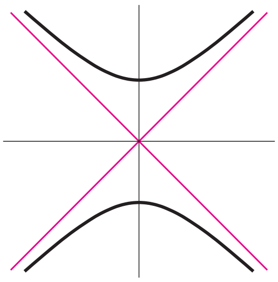
Najprościej sięgnąć tu po współrzędne. Warunek prostopadłości przekątnych, zgodnie ze wzorem (1) daje (w oznaczeniach z rysunku 4) warunek na prostopadłość wektorów przekątnych

$$(x+p)(x-p)-(y+q)(y-q)=0, \quad \text{czyli} \quad x^2-y^2=p^2-q^2.$$

I to jest równanie okręgu o środku w punkcie (0, 0) przechodzącego przez punkt o współrzędnych (p, q).

Co to jest? Taką figurę nazywa się hiperbolą równoosiową i jest to obrócony o $\pm 45°$ wykres odwrotnej proprcjonalności. Na rysunku 5 mamy przypadek, gdy $|p| > |q|$, na rysunku 6 – gdy $|p| < |q|$.


Rys. 5


Rys. 6

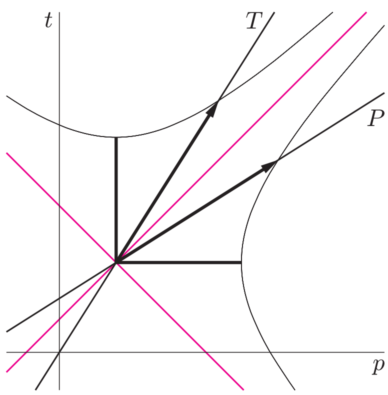
Okręgi okazują się dziurawe, bo każdy z łatwością wskaże proste przechodzące przez środek okręgu i okręgu nie przecinające. Warto zwrócić uwagę na inną geometryczną konsekwencję tej sytuacji. Gdy mamy odcinek odłożony od środka okręgu to z tego, czy przecięcie zawierającej go półprostej poprzeda jego drugi koniec, czy też jest odwrotnie możemy wnioskować o tym, czy jest od promienia dłuższy, czy krótszy. W świetle tego kryterium odcinki w czasoprzestrzeni mogą się nie dać porównać. Dokładniej: porównywać można odcinki, które wszystkie tworzą z tą samą osią układu współrzędnych kąty mniejsze od 45°. Zauważmy, że odcinki izotropowe nie należą do żadnej z tych grup – ich porównywać w ogóle nie można!

To samo analitycznie prezentuje się tak. W zwykłej geometrii równanie okręgu o środku (0, 0) przechodzącego przez (p, q) to $x^2+y^2=p^2+q^2$ i wtedy liczbę $\sqrt{p^2+q^2}$ nazywamy długością wektora $[p, q]$. Konsekwentnie tutaj długością takiego wektora powinien być pierwiastek z p^2-q^2, ale on dla jednej grupy wektorów da się wyciągnąć, dla drugiej trzeba by raczej wyciągać go z q^2-p^2. Wektory izotropowe mają tę sprawę z głowy – długość każdego z nich jest zero.

Mamy więc pokusę, aby wektory jednej z grup traktować inaczej, niż te z drugiej grupy. I fizycy tak robią. Jedne wektory uznają za przyzwoite, drugim wymyślają od *tachionów.* Aby wyjaśnić tę obelgę, trzeba niestety odwołać się do fizycznej interpretacji opisanej geometrii.

Jeśli uznamy poziomą oś (w wyżej wymiarowej przestrzeni – osie), a pionową za czas, to wówczas każda z linii prostych o kierunku bliższym pionu, niż poziomu oznaczać będzie (przy takim obiorze jednostek, by prędkość światła była równa 1) historię jakiegoś układu inercjalnego, tj. poruszającego się jednostajnie po prostej (w naszym przypadku ten drugi warunek jest oczywisty, ale są przecież czasoprzestrzenie o większej liczbie wymiarów). Linie bardziej poziome, niż pionowe, będą fizycznie bez sensu. W sposób naturalny uogólnia się to na krzywe, odmawiając prawa bytu tym, którym zdarza się mieć jako styczną „nielegalną” prostą. Te niedopuszczone krzywe to odpowiedniki nierzeczywistych przemieszczeń, odbywających się z prędkością większą od prędkości światła – *tachion* to w tłumaczeniu z greckiego *prędkościowiec.*

Wypada jednak przed zakończeniem zadać pytanie, po co było kwestionować IV postulat Euklidesa i narażać się na te wszystkie dziwności. Powód jest taki: chodzi o to, jak w naszym świecie opisywać świat poruszający się jednostajnie (i prostoliniowo) względem naszego. I tu przyjmuje się założenie, że czas pozostaje zawsze protopadły do przestrzeni. Jeśli ktoś znajduje się w spoczynku w takim świecie, poruszającym się względem naszego w sposób opisany przez linię T, to z jego punktu widzenia wszelkie zmiany to upływ czasu. Jemu więc przestrzeń będzie jawiła się jako linia P. Badanie relacji między tymi odmiennymi postrzeganiami czasu i przestrzeni – naszym i jego, to właśnie problem, dla opisu którego powołana została geometria czasoprzestrzeni.



Małą Deltę opracował Marek KORDOS

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2005

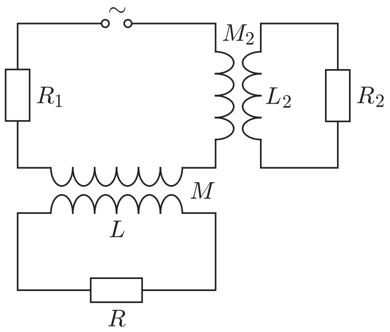
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 400, 401

Redaguje Jerzy B. BROJAN

400. Dlaczego dźwięk słychać dalej w kierunku wiatru? (Oczywiście, prędkość wiatru jest mniejsza od prędkości dźwięku.)



Rys. 1

401. Jak wiadomo, w Europie częstotliwość sieciowa wynosi 50 Hz, a w USA – 60 Hz. Aby zrozumieć powód, dla którego niekorzystny byłby wybór częstotliwości znacznie większej lub znacznie mniejszej, rozważmy następujący model (rys. 1). Odbiornik energii (opornik R) jest dołączony do źródła napięcia przemiennego przez transformator o indukcyjności uzwojenia wtórnego L i współczynniku indukcji wzajemnej między uzwojeniami M. Ponadto w obwodzie występuje opornik R_1 odpowiadający oporności przewodów i uzwojenia transformatora oraz drugi transformator opisany parametrami L_2 i M_2, do którego dołączony jest opornik R_2. Ten drugi obwód symbolizuje prądy wirowe wzbudzane w przewodnikach, które przypadkiem znajdą się w pobliżu kabli doprowadzających energię do właściwego odbiornika.

a) Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby stosunek strat energii (łącznej mocy traconej na opornikach R_1 i R_2) do mocy dostarczanej do opornika R osiągał minimum dla pewnej częstotliwości?

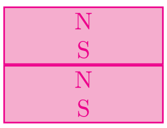
b) Jeśli powyższy warunek jest spełniony, to jakim wzorem dana jest optymalna częstotliwość?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2005

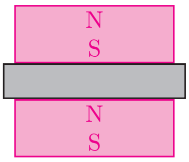
Przypominamy treść zadań:


Rys. 2

392. Izolowany termicznie cylinder jest podzielony nieprzewodzącym ciepła tłokiem na dwie równe części zawierające jednakowe ilości tego samego gazu o temperaturze T_0 pod ciśnieniem p_0 (rys. 2). Do wnętrza doprowadzamy pewną ustaloną ilość ciepła Q (np. grzałką elektryczną). W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej: gdy całe ciepło dostarczymy do jednej części cylindra, czy gdy do każdej części dostarczymy połowę?



Rys. 3a



Rys. 3b

393. Jak wiadomo, silny magnes wrzucony do pionowej rury miedzianej lub aluminiowej spada dość powoli ze względu na efekty indukcyjne (prądy wirowe wzbudzane w rurze). Czy dwa takie magnesy połączone ze sobą jak na rysunku 3a spadają szybciej, czy wolniej niż pojedynczy magnes? A jak szybko – w porównaniu z tymi dwoma przypadkami – spadają te dwa magnesy rozdzielone lekką niemagnetyczną przekładką (rys. 3b)? Należy podać fizyczne uzasadnienie odpowiedzi.

392. Oznaczmy objętości obu części cylindra po dostarczeniu ciepła przez V_1 i V_2, ich temperatury przez T_1 i T_2, ciśnienie (jednakowe) przez p, a liczbę moli w każdej z części przez n. Spełnione są równania

$$pV_1 = nRT_1, \qquad pV + 2 = nRT_2$$

Energia wewnętrzna gazu jest dana wzorem $U = nC_VT$, a przyrost całkowitej energii wewnętrznej w każdym z rozpatrywanych przypadków jest równy Q. Stąd

$$2nC_VT_0 + Q = nC_V(T_1 + T_2) = \frac{C_V}{R}p(V_1 + V_2) = \frac{2C_V}{R}pV_0$$

Równanie to obowiązuje dla dowolnego podziału Q, czyli wzrost ciśnienia nie zależy od tego podziału. (Dość podobne były przed wieloma laty zadania 198 i 257.)

393. Z doświadczeń przeprowadzonych przez autora wynika, że magnesy połączone „na styk” spadają wolniej, niż magnes pojedynczy, natomiast odsunięte od siebie – z prędkością pośrednią. Aby to wyjaśnić, zauważmy, że podwójny magnes wytwarza silniejsze pole, a stąd i silniejsze prądy wirowe, niż pojedynczy. Oddziaływanie *każdego* z magnesów składowych z tymi prądami będzie silniejsze, a zatem przy niezmienionej prędkości spadania siła hamująca wzrosłaby więcej niż dwukrotnie w porównaniu z przypadkiem pojedynczego magnesu. Ponieważ ciężar magnesów wzrósł dwukrotnie, więc logicznym wnioskiem jest zmniejszenie prędkości spadania. Rozsunięte magnesy wytwarzają pole słabsze, niż zetknięte ze sobą, dlatego i efekt hamowania jest słabszy (ale silniejszy, niż dla pojedynczego magnesu).

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2005

Zadania z matematyki nr 503, 504

Redaguje Marcin E. KUCZMA

503. Wyznaczyć najmniejszą liczbę dodatnią a, dla której zachodzi implikacja: Jeżeli funkcja $f\colon \langle 0;1\rangle \to \langle 0;\infty)$ spełnia warunki $f(1)=1$ oraz

$$f(x+y) \geqslant f(x)+f(y) \qquad \text{dla } x\in\langle 0;1\rangle,\ \ y\in\langle 0;1-x\rangle,$$

to $f(x)\leqslant ax$ dla $x\in\langle 0;1\rangle$.

504. Gra: odgadywanie liczby. Przeciwnik wybiera liczbę ze zbioru $\{0,1,\ldots,15\}$. Mamy prawo zadać 7 pytań, oczekując odpowiedzi *Tak* lub *Nie*. Przeciwnik na wszystkie pytania odpowiada; wolno mu przy tym skłamać, ale co najwyżej jeden raz. Podać taktykę gwarantującą prawidłowe rozpoznanie wybranej liczby.

Zadanie 504 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2005

Przypominamy treść zadań:

495. Wyznaczyć zbiór tych liczb wymiernych dodatnich, które można przedstawić w postaci ułamka $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ dla pewnych liczb naturalnych a, b, c, d.

496. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie BIC w punktach I i D; prosta BI przecina okrąg opisany na trójkącie CIA w punktach I i E; prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie AIB w punktach I i F. Wyznaczyć największą możliwą wartość iloczynu $\dfrac{|AI|}{|AD|}\cdot\dfrac{|BI|}{|BE|}\cdot\dfrac{|CI|}{|CF|}$.

495. Wykażemy, że *każda* dodatnia liczba wymierna ma przedstawienie wymaganej postaci. Weźmy dowolną liczbę wymierną $x>0$.

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy $1<x<2$; tak więc $x=m/n$ $(m,n\in\mathbb{N})$, $n<m<2n$. W tym przypadku wystarczy przyjąć

$$a=c=m+n,\quad b=2m-n,\quad d=2n-m;$$

wówczas $a+b=3m$, $ab=2m^2+mn-n^2$,

$$a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=3m(3m^2-3mn+3n^2),$$

podobnie wyrażamy c^3+d^3 i otrzymujemy

$$\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}=\frac{3m(3m^2-3mn+3n^2)}{3n(3n^2-3nm+3m^2)}=x.$$

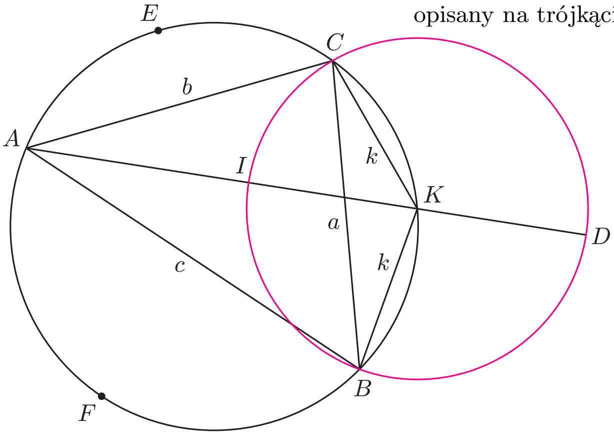
W przypadku ogólnym, gdy x jest dowolną liczbą wymierną dodatnią, znajdujemy liczbę wymierną $y=k/\ell$ taką, że $1<xy^3<2$. W myśl konkluzji poprzedniego przypadku liczba xy^3 daje się zapisać jako ułamek

$$\frac{A^3+B^3}{C^3+D^3};\qquad A,B,C,D\in\mathbb{N}.$$

Stąd dostajemy żądane przedstawienie liczby x:

$$x=\frac{1}{y^3}\cdot\frac{A^3+B^3}{C^3+D^3}=\frac{(A\ell)^3+(B\ell)^3}{(Ck)^3+(Dk)^3}.$$

496. Punkt K,w którym prosta AI przecina ponownie okrąg opisany na trójkącie ABC, jest środkiem łuku BC, więc cięciwy KB, KC mają równą długość k. Tę samą długość ma też odcinek KI (fakt znany lub łatwy do udowodnienia). Zatem okrąg opisany na trójkącie BIC ma środek w punkcie K, a odcinek ID jest jego średnicą.



Twierdzenie Ptolemeusza, zastosowane do czworokąta $ABKC$, daje równość $|AK|\cdot a=bk+ck$ (gdzie jak zwykle a, b, c to długości boków trójkąta ABC). Stąd

$$\frac{|AI|}{|AD|}=\frac{|AK|-|KI|}{|AK|+|KI|}=\frac{\dfrac{bk+ck}{a}-k}{\dfrac{bk+ck}{a}+k}=\frac{b+c-a}{b+c+a}$$

i z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną trójki liczb wynika, że

$$\frac{|AI|}{|AD|}\cdot\frac{|BI|}{|BE|}\cdot\frac{|CI|}{|CF|}=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{c+a-b}{c+a+b}\cdot\frac{a+b-c}{a+b+c}\leqslant\frac{1}{27}.$$

Ponieważ dla trójkąta równobocznego zachodzi równość, szukane maksimum wynosi 1/27.

Patrz w niebo

Od dość dawna wiemy już, że pulsary są szybko wirującymi gwiazdami neutronowymi z silnym polem magnetycznym i że powstają w wyniku zagłady bardzo masywnych gwiazd eksplodujących jako supernowe II typu. W naszej Galaktyce znamy znacznie ponad 1000 pulsarów i kilka z nich jest stowarzyszonych z mgławicami pozostałymi po wybuchu. Jednak do niedawna tylko o jednym pulsarze było wiadomo, że powstał w wyniku wybuchu zaobserwowanej supernowej. Był nim pulsar w Krabie, mgławicy powstałej – jak i sam pulsar – podczas eksplozji obserwowanej w roku 1054. Współczesna wiedza o tych gwałtownych zjawiskach pochodzi głównie z badań tego właśnie obiektu.

Od niedawna znamy już takie dwa obiekty. Grupa amerykańskich astronomów w roku 2001 ogłosiła, że odkryta za pomocą rentgenowskiego satelity Chandra mgławica G11.2-0.3 powstała w wyniku eksplozji zaobserwowanej przez chińskich astronomów w roku 386, co wynika z tempa jej ekspansji. Mgławica, odkryta w latach 1970., leży w Strzelcu w odległości 5 kpc, a w jej centrum znajduje się rentgenowski pulsar wirujący w tempie 14 obrotów na sekundę. Ten fakt – niestety – sugeruje, że coś jest nie w porządku. Bowiem pulsary, działając swoim polem magnetycznym na otoczenie, tracą stopniowo energię i zwalniają obroty. Skoro pulsar w Krabie, wirujący w tempie 33 obrotów na sekundę, ma prawie tysiąc lat, to pulsar w G11.2-0.3 powinien mieć znacznie więcej niż 1620 lat – niektórzy badacze skłonni są oceniać jego wiek na ponad 24 000 lat. Przez taki czas pulsar powinien opuścić centrum własnej mgławicy, gdyż podczas ruchu w Galaktyce doznaje ona znaczącego oporu ze strony rozproszonej materii międzygwiazdowej, natomiast sam pulsar praktycznie nie. Tymczasem pulsar leży dokładnie w centrum mgławicy, co dowodzi ich jednakowego i młodego wieku. Albo więc tempo rotacji pulsarów jest gorszym, niż się dotąd zdawało, miernikiem ich wieku, albo pulsar w G11.2-0.3 od urodzenia wirował wyjątkowo powoli. W każdym razie sprawa wymaga dalszych badań.

Tomasz KWAST

Czerwiec

W czerwcowe wieczory nisko nad południowym horyzontem widać niepozorny gwiazdozbiór Wagi. W Starożytności jego obszar należał do sąsiedniego obecnie Skorpiona. Pozostałością po tym są arabskie nazwy najjaśniejszych gwiazd Wagi, oznaczające Północny i Południowy Kleszcz Skorpiona. Wtedy też w Wadze znajdował się punkt równonocy jesiennej, który do dziś zdążył – wskutek precesji – przemieścić się do Panny. Przez niewielki teleskop można w Wadze zobaczyć właściwie tylko jeden niegwiazdowy obiekt: gromadę kulistą NGC 5897. Jej jasność wynosi 10,9 mag, a oddalona jest o ponad 16 kpc.

Wenus jest w Bliźniętach i wieczorem zachodzi. W trzeciej dekadzie miesiąca w Bliźniętach będzie też Merkury i 27 VI zajdzie żadka sytuacja, że ta planeta znajdzie się o drobny ułamek stopnia od Wenus. Dzięki Wenus być może da się Merkurego łatwo znaleźć na niebie – będzie to wprawdzie krótko po zachodzie Słońca, ale warto spróbować. Mars jest Rybach i wschodzi koło północy. Jowisz jest w Pannie i widać go w pierwszej połowie nocy, a Saturn na granicy Bliźniąt i Raka, przez co – podobnie jak Wenus – widać go krótko po zachodzie Słońca. Nów Księżyca wypada 6 VI, a pełnia 22 VI. Księżyc zakryje Jowisza 16 VI, ale zobaczą to mieszkańcy Indonezji i Australii, a 20 VI zakryje Antaresa, co będzie widoczne z południowej Europy, Bliskiego Wschodu i południowej Azji. 21 VI rozpocznie się lato, czyli Słońce wejdzie w znak Raka, a dni zaczną się już skracać.

T. K.

O ewolucji słów kilka

Jeśli obejrzymy jakikolwiek żywy twór natury, czy to będzie mrowisko, szpak, najprostsza bakteria, czy nawet pojedyncze białko, zauważymy, jak bardzo są to skomplikowane obiekty, zazwyczaj rozpoznamy funkcje które pełnią i zauważymy jak precyzyjnie do ich pełnienia są przystosowane.

Mechanizmem, który doprowadził do takich efektów jest ewolucja biologiczna.

Ewolucja to mechanizm, w którym działają dwa mechanizmy: w pierwszym generowana jest rozmaitość rozwiązań podobnych do wejściowego, w drugim wybierane są te rozwiązania, które są lepsze. One stają się rozwiązaniami wyjściowymi i za razem wejściowymi dla kolejnego kroku ewolucji.

Mechanizm tworzenia zmienności, czyli pierwszy etap ewolucji wygląda tak: Struktura organizmów żywych zapisana jest w pewnej sekwencji symboli liniowo zapisanej w cząsteczce DNA (lub RNA). Zapis ten można porównać raczej do przepisu na ciasto czy programu komputerowego, niż do projektu będącego modelem gotowego obiektu. Zapis ten jest przekazywany potomkom, czyli dziedziczony. Ewolucję opartą o tego typu dziedziczną strukturę nazywamy procesem genetycznym. Jednak w zapisie genetycznym pojawiają się czasem przypadkowe zmiany czyli mutacje. Cóż z tego można by powiedzieć? Otóż przypadkowe błędy w przepisie na organizm, powodują powstanie przypadkowych zmian w strukturze organizmu. Analogicznie moglibyśmy napisać słówko:

geny

i wygenerować serię błędnych wersji tego słowa:

grny, jeny, geby…

Jak widzimy, większość przypadkowych zmian powoduje, iż słówko staje się bezsensownym zbiorem liter, ale czasem pojawi się nowe znaczenie (jeny). Zabawę można ciągnąć dalej:

jwny, jedy, jony itd.

Podobnie jest z zapisem genetycznym. Zazwyczaj mutacje tylko psują coś, co wcześniej działało dobrze, ale czasem zdarza się, iż po mutacji struktura działa lepiej, albo wręcz inaczej.

I w tym momencie wkracza dobór. Jest to niesłychanie prosty, oczywisty mechanizm: zapis genetyczny może tworzyć obiekt który działa skuteczniej, mniej skutecznie, lub nie działa wcale. Pozostaje sobie odpowiedzieć na pytanie, co jest miarą skuteczności działania zapisu genetycznego? Otóż w procesie ewolucyjnym tą miarą jest efektywność tworzenia swoich kopii. Oczywiście gdy rozważamy sprawy cząstkowo, możemy wyróżnić poszczególne adaptacje: skrzydła zoptymalizowane tak, aby ptak mógł skutecznie latać. Oczy zoptymalizowane tak, alby człowiek mógł obserwować świat. Czy choćby cząsteczka hemoglobiny zoptymalizowana do tego, żeby skutecznie przenosić tlen do konkretnych miejsc, w których jest on potrzebny [tu odnośnik do delty z hemoglobina]. Jednak wszystkie te cząstkowe cele optymalizacyjne, mają w ewolucji biologicznej wartość tylko o tyle, o ile składają się na cel nadrzędny, jakim jest powielenie informacji genetycznej. Dlaczego tak się dzieje? Wyobraźmy sobie organizm żywy wyposażony w najdoskonalsze skrzydła, pozwalające np. bardzo szybko latać. Dla technika czy inżyniera mogą one być niedoścignionym wzorem doskonałości, ale cóż z tego, jeśli nie przyczynią się do powielenia zapisu genetycznego, który jest przepisem na nie? A nie muszą! W takim wypadku okażą się jednorazowym wybrykiem natury!

Zwróćmy uwagę na fakt, że choć różne warianty genetycznych przepisów powstają w sposób zupełnie losowy, a w związku z tym w swej masie nie zawierają więcej informacji, niż biały szum widoczny na ekranie telewizora, który akurat nie odbiera żadnej stacji, to jednak w kolejnym etapie, dzięki selekcji czy doborowi naturalnemu, ewoluujący system odbiera informację o strukturze otaczającego świata. Dzieje się to pośrednio. Jedyną informacją, którą odbiera ewoluujący system jest fakt, czy dany organizm poradził sobie w świecie zewnętrznym i jak sobie poradził (to znaczy, czy przeżył i spłodził dzieci a w istocie: ile spłodził dzieci). Ta liczba spłodzonych potomków jest w istocie sumaryczną oceną jakości (współ)działania poszczególnych elementów powstałych dzięki współdziałaniu poszczególnych fragmentów zapisu genetycznego. Mogłoby się wydawać, że to bardzo niewielka porcja informacji, którą dodatkowo obdzielić należy wszystkie organy i wszystkie geny danego organizmu… ta skromna informacja zwrotna działa jednak przez dziesiątki, setki czy miliony pokoleń, na populacje złożone czasem z tysięcy, a czasem z miliardów osobników. Doświadczenie zebrane przez fakt, że pojedynczy osobnik rozmnożył się skutecznie a inny zmarł bezdzietnie, może być znikome, jednak suma takich znikomych doświadczeń osobników należących do danego pokolenia już może być już całkiem pokaźna, a suma doświadczeń kolejnych pokoleń okazuje się wykorzystywać skutecznie wiedzę o świecie zewnętrznym.

Tak więc ewolucja biologiczna to mechanizm przetwarzający informację o świecie zewnętrznym, wykorzystujący ją do tworzenia struktur dobrze radzących sobie z życiem i rozmnażaniem w tym świecie, mechanizm który pod wieloma względami działa podobnie jak komputer, co prawda bezmyślny i działający nie intencjonalnie, ale przetwarzający równolegle ogromną iczbę procesów, która jest na pewno większa niż 10^{20}.

Paweł Poręba
Współpraca: Anna LORENC, Jarek BRYK

Korespondencję do Kącika Biologicznego prosimy przysyłać do Jarka Bryka pod adresem: bryko@poczta.onet.pl

delta
$h=6{,}63\cdot 10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141592\ldots$
POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

Zadania I stopnia
Olimpiad 2005/2006
będą opublikowane
w Delcie 9/2005

Olimpiada

Zadania II stopnia oraz finału
Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

LVI OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2004/2005

ZAWODY II STOPNIA (25–26 lutego 2005)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których n^n+1 oraz $(2n)^{2n}+1$ są liczbami pierwszymi.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC. Wykazać, że jeżeli

$$\measuredangle BAD = \measuredangle BMC = \measuredangle CMD,$$

to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

3. W przestrzeni danych jest n punktów ($n \geqslant 2$), z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Niektóre z tych punktów zostały połączone odcinkami. Niech K będzie liczbą poprowadzonych odcinków ($K \geqslant 1$), a T liczbą powstałych trójkątów. Udowodnić, że $9T^2 < 2K^3$.

4. Dany jest wielomian $W(x)=x^2+ax+b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:

Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p.

Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której

$$W(m)=W(m+1)=0\,.$$

5. Dany jest romb $ABCD$, w którym

$$\measuredangle BAD > 60^\circ.$$

Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD, przy czym

$$\measuredangle ECF = \measuredangle ABD.$$

Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że

$$\frac{PQ}{EF}=\frac{AB}{BD}\,.$$

6. Liczby a, b, c należą do przedziału $\langle 0;1\rangle$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant 2\,.$$

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl

ZAWODY III STOPNIA (13–14 kwietnia 2005)

1. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, n) liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie

$$(x-y)^n = xy\,.$$

2. Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na okręgu o. Punkt S leży wewnątrz okręgu o i spełnia warunki

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC\,.$$

Prosta zawierająca dwusieczną kąta ASB przecina okrąg o w punktach P i Q. Dowieść, że $PS = QS$.

3. W kwadratowej tablicy o wymiarach $2n \times 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, znajduje się $4n^2$ liczb rzeczywistych o sumie równej 0 (na każdym polu tablicy jedna liczba). Wartość bezwzględna każdej z tych liczb jest nie większa od 1. Dowieść, że wartość bezwzględna sumy wszystkich liczb z pewnego rzędu (poziomego lub pionowego) nie przekracza n.

4. Dana jest liczba rzeczywista $c > -2$. Dowieść, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ są dodatnie oraz

$$\sqrt{x_1^2 + cx_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 + cx_2x_3 + x_3^2} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{x_n^2 + cx_nx_1 + x_1^2} = \sqrt{c+2}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,,$$

to $c = 2$ lub $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

5. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech $m = 4k^2 - 5$. Wykazać, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, że każdy wyraz ciągu (x_n) określonego wzorami

$$x_1 = a\,,\ x_2 = b\,, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ dla } n \geqslant 1$$

jest względnie pierwszy z liczbą m.

6. Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt wypukły o polu nie mniejszym niż 3/4.

Informacje o przebiegu LVI Olimpiady Matematycznej

I. W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1231 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 506 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego 124 uczniów.

II. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 15 kwietnia br. postanowił przyznać 16 osobom tytuł laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 punktów możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

I miejsce: Michał PILIPCZUK (**24 pkt.**), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Joanna Jaszuńska, Waldemar Pałuba, Tomasz Żukowski, Karol Cwalina, Marcin Pilipczuk, Wojciech Czerwiński, Jakub Onufry Wojtaszczyk, Łukasz Bury, Maria Donten i Bartłomiej Romański).

II miejsce: Tomasz WARSZAWSKI (**23 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca, Michał Kapustka, Grzegorz Kapustka, Jacek Dymel, Sławomir Dinew, Żywomir Dinew, Leszek Pieniążek i Witold Jarnicki).

Nagrody stopnia drugiego

Miejsca III–IV:

Piotr ACHINGER (**19 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Jerzy Konarski, Wojciech Boratyński, Edward Stachowski i Marcin Pilipczuk).

Nadbor DROZD (**19 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciele: Cezary Urban i Augustyn Kałuża).

Miejsca V–VIII:

Krzysztof KĄS (**18 pkt.**), kl. III, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska, Adam Neugebauer i Robert Kąs).

Tomasz KULCZYŃSKI (**18 pkt.**), kl. I, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Jolanta Jerzy, Henryk Pawłowski i Lev Kourliandtchik).

Wojciech ŚMIETANKA (**18 pkt.**), kl. I, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Filip WOLSKI (**18 pkt.**), kl. II, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Miejsca IX–XI:

Piotr BUTRYN (**17 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Michał Krych, Paweł Strzelecki, Tomasz Żukowski i Jerzy Bednarczuk).

Michał JASTRZĘBSKI (**17 pkt.**), kl. I, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Wiktor Bartol i Jerzy Bednarczuk).

Andrzej KAMIŃSKI (**17 pkt.**), kl. III I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie (nauczyciel: Paweł Rudecki).

Nagrody stopnia trzeciego

Miejsce XII:

Małgorzata BLADOSZEWSKA (**15 pkt.**), kl. I, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska i Adam Neugebauer).

Miejsca XIII–XVI:

Filip GROTKOWSKI (**14 pkt.**), kl. III, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (nauczyciel: Henryk Pawłowski).

Jakub KALLAS (**14 pkt.**), kl. I, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Michał MARCINKOWSKI (**14 pkt.**), kl. II, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (nauczyciele: Przemysław Szczepaniak, Augustyn Kałuża i Zbigniew Romanowicz).

Sylwester ZAJĄC (**14 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

III. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 18 zawodników:

Miejsca XVII–XXXIV:

Marek ADAMCZYK (**12 pkt.**), kl. III, LO im. Bolesława Prusa w Żarach (nauczyciel: Jerzy Kacierzyński).

Krzysztof DOROBISZ (**12 pkt.**), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca, Lucyna Cięciwa, Bartosz Walczak i Michał Lasoń).

Łukasz GARNCAREK (**12 pkt.**), kl. II, II LO im. Marii Konopnickiej w Opolu (nauczyciele: Maria Romanowska i Zbigniew Garncarek).

Jarosław GŁOWACKI (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Szymon GWÓŹDŹ (**12 pkt.**), kl. III, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim (nauczyciel: Paweł Kwiatkowski).

Kamil HERBA (**12 pkt.**), kl. II, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska i Adam Neugebauer).

Martyna JÓŹWIAK (**12 pkt.**), kl. II, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Anna Karaszewska i Lev Kourliandtchik).

Karol KOSIŃSKI (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Stefan ŁAPICKI (**12 pkt.**), kl. III, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (nauczyciel: Augustyn Kałuża).

Maciej MACHULEC (**12 pkt.**), kl. I, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Lucyna Cięciwa, Michał Matuszczyk i Dorota Didik).

Piotr NAYAR (**12 pkt.**), kl. III, VIII LO im. Władysława IV w Warszawie (nauczyciele: Waldemar Pałuba i Emilia Psoda).

Hubert ORLIK-GRZESIK (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Patryk PAGACZ (**12 pkt.**), kl. III, ZSO nr 1 im. Mikołaja Kopernika w Jarosławiu (nauczyciel: Krzysztof Wilgucki).

Paweł PASTECZKA (**12 pkt.**), kl. II, II LO im. Emilii Plater w Sosnowcu (nauczyciele: Maria Bańska i Michał Matuszczyk).

Jan SZEJKO (**12 pkt.**), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Waldemar Pałuba i Tomasz Żukowski).

Łukasz WIATRAK (**12 pkt.**), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Paweł ZABORSKI (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca i Alicja Dłużeń).

Paweł ZACZKOWSKI (**12 pkt.**), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Lucyna Cięciwa i Tomasz Szymczyk).

IV. W skład delegacji polskiej na XLVI Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbędzie się w Meksyku w dniach 9–18 lipca br., powołani zostali:
Piotr Achinger,
Nadbor Drozd,
Tomasz Kulczyński,
Michał Pilipczuk,
Wojciech Śmietanka
i *Tomasz Warszawski.*

Jako zawodników rezerwowych powołano
Filipa Wolskiego
i *Michała Jastrzębskiego.*

V. Na XXVIII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się w dniach 27 czerwca – 6 lipca br. w Austrii, powołano delegację w składzie:
Małgorzata Bladoszewska,
Piotr Butryn,
Krzysztof Dorobisz,
Kamil Herba,
Andrzej Kamiński
i *Paweł Zaczkowski.*

Zawodnicy rezerwowi:
Jan Szejko,
Łukasz Wiatrak,
Martyna Jóźwiak
i *Paweł Pasteczka.*

VI. Powołano też delegację na XVI Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich, które odbędą się w Szwecji na początku listopada br. Skład tej delegacji jest następujący:
Michał Jastrzębski,
Jakub Kallas,
Maciej Machulec
Michał Marcinkowski
i *Filip Wolski.*

Zawodnicy rezerwowi:
Jan Szejko,
Martyna Jóźwiak,
Łukasz Wiatrak
i *Paweł Pasteczka.*

VII. Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbędzie się w dniach 5–19 czerwca br. w Domu Wczasowym *Zgoda* w Zwardoniu. Na obóz ten zostały powołane następujące osoby:
Piotr Achinger,
Małgorzata Bladoszewska,
Piotr Butryn,
Szymon Doroz,
Szymon Giżecki,
Michał Jastrzębski,
Martyna Jóźwiak,
Jakub Kallas,
Tomasz Kulczyński,
Maciej Machulec,
Michał Marcinkowski,
Przemysław Mazur,
Paweł Pasteczka,
Natalia Sakowska,
Jan Szejko,
Tomasz Szumny,
Wojciech Śmietanka,
Tomasz Warszawski,
Łukasz Wiatrak
i *Paweł Zaczkowski.*

Zawodnicy rezerwowi:
Aleksander Jurkowski,
Filip Wieczorek,
Michał Frankiewicz
i *Urszula Swianiewicz.*

LIV OLIMPIADA FIZYCZNA 2004/2005

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej: http://www.kgof.edu.pl

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Pocisk w kształcie stożka o polu podstawy S i kącie rozwarcia 2α porusza się z prędkością v wzdłuż swojej osi (w stronę wierzchołka) w bardzo rozrzedzonym jednoatomowym gazie. Temperatura gazu jest na tyle niska, a prędkość v na tyle duża, że można przyjąć, że atomy gazu są nieruchome. Gęstość gazu jest równa ρ.

Zakładając, że atomy gazu zderzają się z powierzchnią pocisku doskonale sprężyście i nie zderzają się ze sobą, obliczyć siłę oporu, jaka działa na pocisk. Powierzchnia pocisku jest idealnie gładka. Podaj wartość liczbową dla $\rho = 10^{-3}$ kg/m^3, $v = 7$ km/s, $\alpha = 45°$, $S = 0{,}01$ m^2.

2. Wąska wiązka fullerenów – cząsteczek węgla C_{60} w kształcie piłki futbolowej – pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną o stałej sieci $d = 100$ nm (siatką dyfrakcyjną jest płytka z azotku krzemu z wyciętymi równoległymi wąskimi szczelinami). Za siatką znajdują się detektory zliczające cząsteczki docierające do poszczególnych punktów płaszczyzny („ekranu") znajdującej się w dużej odległości od siatki i równoległej do niej. Wskazania detektorów służą do wyznaczenia powstałego obrazu interferencyjnego.
a) Przyjmując, że rozkład prędkości cząsteczek (v) w wiązce jest rozkładem jednorodnym w zakresie $v \in [v_0 - \Delta v, v_0 + \Delta v]$, wyznacz kąt ugięcia wiązki α_n odpowiadający położeniu środka prążka interferencyjnego n-tego rzędu oraz kąt $\Delta\alpha_n$ odpowiadający szerokości tego prążka (prążek jest obszarem, do którego dolatują cząsteczki). Podaj wartości liczbowe dla $n = 1$, $v_0 = 117$ m/s, $\Delta v = 0,17 v_0$. Rozważ tylko te prążki, dla których $\sin\alpha_n \approx \alpha_n$.
b) Jaki jest dopuszczalny rozrzut Δv prędkości cząsteczek w wiązce (przy ustalonym v_0), aby prążek n-tego rzędu był dobrze rozróżnialny, tzn. aby po obu jego stronach były miejsca, do których nie docierają cząsteczki?

Zakładamy, że każda z cząsteczek ma dokładnie określony pęd.

Masa atomu węgla jest równa $2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, stała Plancka $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js.

3. Rozważmy gumowy balonik, który po nadmuchaniu powietrzem ma kształt kuli.
a) Gdy promień balonika wynosił $r_1 = 0{,}1$ m, to wewnątrz panowało ciśnienie $p_1 = 1{,}1 \cdot 10^5$ Pa. Jakie ciśnienie panuje wewnątrz balonika, po nadmuchaniu go tak, by miał promień $r_2 = (3/2)r_1$? W obu przypadkach temperatura powietrza wewnątrz balonika jest równa temperaturze otoczenia i wynosi $T_0 = 300$ K. Ciśnienie powietrza otaczającego balonik jest równe $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa.
b) Balonik o promieniu r_2 (czyli po nadmuchaniu zgodnie z pkt. a)) zanurzono powoli w wodzie na taką głębokość, by jego promień zmalał do $r_3 = r_1$. Ile wynosi ta głębokość? Jakie są temperatura i ciśnienie wewnątrz balonika po zanurzeniu? Zakładamy, że powłoka balonika nie przepuszcza ciepła. Początkowa temperatura wewnątrz balonika była równa T_0. Balonik przed zanurzeniem znajdował się tuż nad powierzchnią wody.
c) Jaką pracę wykonano w trakcie zanurzania zgodnie z pkt. b)?

Energia sprężysta gumy, z której jest wykonany balonik, jest równa $E_s = (1/2)\alpha S^2$, gdzie α jest pewną stałą, a S – powierzchnią balonika. Balonik jest na tyle mały, że również po zanurzeniu w wodzie ma kształt kuli. Przyjmij, że powietrze zachowuje się jak gaz doskonały o molowym cieple właściwym przy stałej objętości $c_V = (5/2)R$, gdzie R jest uniwersalną stałą gazową. Guma, z której jest wykonany balonik, ma zaniedbywalną masę oraz zaniedbywalną pojemność cieplną. Zaniedbaj również gęstość powietrza w porównaniu z gęstością wody $d_w = 1000$ kg/m^3. Przyspieszenie ziemskie g = 9,8 m/s^2.

Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:
- cienki drut z niemagnetycznego metalu,
- silny magnes stały,
- ciężarek o masie $m = (100,0 \pm 0{,}5)$ g,
- statyw, pręty stalowe, uchwyty,
- linijkę,
- generator napięcia sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości,
- przewody elektryczne z zaciskami,
- papier milimetrowy.

Wyznacz gęstość liniową (masę na jednostkę długości) drutu. Przyspieszenie ziemskie wynosi g = 9,81 m/s^2.

Wskazówka. Prędkość V fal poprzecznych w strunie o gęstości liniowej μ napiętej siłą F wyraża się wzorem $V = \sqrt{F/\mu}$.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Statek kosmiczny Obcych zbliża się do Ziemi wzdłuż jej osi obrotu ze stałą prędkościa v (porównywalną z prędkością światła c) od strony Bieguna Północnego.
a) Gdy radar statku pokazuje, że Biegun Północny znajduje się w odległości d_r od statku, Obcy robią Ziemi zdjęcie. Jaki zakres szerokości geograficznych Ziemi obejmuje to zdjęcie?
b) Na innym zdjęciu wykonanym przez Obcych widać obszar Ziemi o szerokościach geograficznych północnych od 30° do 90°. Jaką odległość (mierzoną w wielokrotnościach promienia Ziemi R) wskazywał radar statku w chwili zrobienia tego zdjęcia, jeśli zbliżał się on z prędkością 0,8 c? Jaka była w układzie statku odległość statku Obcych od Bieguna Północnego