# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2005

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

## Zadania z fizyki nr 400, 401

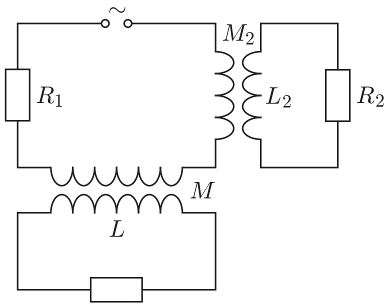
*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

**400**. Dlaczego dźwięk słychać dalej w kierunku wiatru? (Oczywiście, prędkość wiatru jest mniejsza od prędkości dźwięku.)

**401**. Jak wiadomo, w Europie częstotliwość sieciowa wynosi 50 Hz, a w USA – 60 Hz. Aby zrozumieć powód, dla którego niekorzystny byłby wybór częstotliwości znacznie większej lub znacznie mniejszej, rozważmy następujący model (rys. 1). Odbiornik energii (opornik $R$) jest dołączony do źródła napięcia przemiennego przez transformator o indukcyjności uzwojenia wtórnego $L$ i współczynniku indukcji wzajemnej między uzwojeniami $M$. Ponadto w obwodzie występuje opornik $R_1$ odpowiadający oporności przewodów i uzwojenia transformatora oraz drugi transformator opisany parametrami $L_2$ i $M_2$, do którego dołączony jest opornik $R_2$. Ten drugi obwód symbolizuje prądy wirowe wzbudzane w przewodnikach, które przypadkiem znajdą się w pobliżu kabli doprowadzających energię do właściwego odbiornika.

a) Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby stosunek strat energii (łącznej mocy traconej na opornikach $R_1$ i $R_2$) do mocy dostarczanej do opornika $R$ osiągał minimum dla pewnej częstotliwości?

b) Jeśli powyższy warunek jest spełniony, to jakim wzorem dana jest optymalna częstotliwość?




Rys. 1

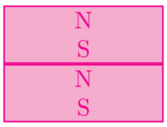
## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2005

Przypominamy treść zadań:

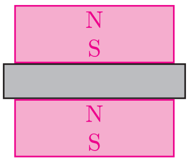
**392**. Izolowany termicznie cylinder jest podzielony nieprzewodzącym ciepła tłokiem na dwie równe części zawierające jednakowe ilości tego samego gazu o temperaturze $T_0$ pod ciśnieniem $p_0$ (rys. 2). Do wnętrza doprowadzamy pewną ustaloną ilość ciepła $Q$ (np. grzałką elektryczną). W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej: gdy całe ciepło dostarczymy do jednej części cylindra, czy gdy do każdej części dostarczymy połowę?

Rys. 2

**393**. Jak wiadomo, silny magnes wrzucony do pionowej rury miedzianej lub aluminiowej spada dość powoli ze względu na efekty indukcyjne (prądy wirowe wzbudzane w rurze). Czy dwa takie magnesy połączone ze sobą jak na rysunku 3a spadają szybciej, czy wolniej niż pojedynczy magnes? A jak szybko – w porównaniu z tymi dwoma przypadkami – spadają te dwa magnesy rozdzielone lekką niemagnetyczną przekładką (rys. 3b)? Należy podać fizyczne uzasadnienie odpowiedzi.




Rys. 3a




Rys. 3b

**392**. Oznaczmy objętości obu części cylindra po dostarczeniu ciepła przez $V_1$ i $V_2$, ich temperatury przez $T_1$ i $T_2$, ciśnienie (jednakowe) przez $p$, a liczbę moli w każdej z części przez $n$. Spełnione są równania

$$pV_1 = nRT_1, \qquad pV + 2 = nRT_2$$

Energia wewnętrzna gazu jest dana wzorem $U = nC_V T$, a przyrost całkowitej energii wewnętrznej w każdym z rozpatrywanych przypadków jest równy $Q$. Stąd

$$2nC_V T_0 + Q = nC_V(T_1 + T_2) = \frac{C_V}{R} p(V_1 + V_2) = \frac{2C_V}{R} pV_0$$

Równanie to obowiązuje dla dowolnego podziału $Q$, czyli wzrost ciśnienia nie zależy od tego podziału. (Dość podobne były przed wieloma laty zadania 198 i 257.)

**393**. Z doświadczeń przeprowadzonych przez autora wynika, że magnesy połączone „na styk” spadają wolniej, niż magnes pojedynczy, natomiast odsunięte od siebie – z prędkością pośrednią. Aby to wyjaśnić, zauważmy, że podwójny magnes wytwarza silniejsze pole, a stąd i silniejsze prądy wirowe, niż pojedynczy. Oddziaływanie *każdego* z magnesów składowych z tymi prądami będzie silniejsze, a zatem przy niezmienionej prędkości spadania siła hamująca wzrosłaby więcej niż dwukrotnie w porównaniu z przypadkiem pojedynczego magnesu. Ponieważ ciężar magnesów wzrósł dwukrotnie, więc logicznym wnioskiem jest zmniejszenie prędkości spadania. Rozsunięte magnesy wytwarzają pole słabsze, niż zetknięte ze sobą, dlatego i efekt hamowania jest słabszy (ale silniejszy, niż dla pojedynczego magnesu).

# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2005

## Zadania z matematyki nr 503, 504

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**503**. Wyznaczyć najmniejszą liczbę dodatnią $a$, dla której zachodzi implikacja: Jeżeli funkcja $f\colon \langle 0;1\rangle \to \langle 0;\infty)$ spełnia warunki $f(1)=1$ oraz

$$f(x+y) \geqslant f(x)+f(y) \qquad \text{dla } x\in\langle 0;1\rangle,\ \ y\in\langle 0;1-x\rangle,$$

to $f(x)\leqslant ax$ dla $x\in\langle 0;1\rangle$.

**504**. Gra: odgadywanie liczby. Przeciwnik wybiera liczbę ze zbioru $\{0,1,\ldots,15\}$. Mamy prawo zadać 7 pytań, oczekując odpowiedzi *Tak* lub *Nie*. Przeciwnik na wszystkie pytania odpowiada; wolno mu przy tym skłamać, ale co najwyżej jeden raz. Podać taktykę gwarantującą prawidłowe rozpoznanie wybranej liczby.

Zadanie 504 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2005

Przypominamy treść zadań:

**495**. Wyznaczyć zbiór tych liczb wymiernych dodatnich, które można przedstawić w postaci ułamka $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ dla pewnych liczb naturalnych $a$, $b$, $c$, $d$.

**496**. Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$. Prosta $AI$ przecina okrąg opisany na trójkącie $BIC$ w punktach $I$ i $D$; prosta $BI$ przecina okrąg opisany na trójkącie $CIA$ w punktach $I$ i $E$; prosta $CI$ przecina okrąg opisany na trójkącie $AIB$ w punktach $I$ i $F$. Wyznaczyć największą możliwą wartość iloczynu $\dfrac{|AI|}{|AD|}\cdot\dfrac{|BI|}{|BE|}\cdot\dfrac{|CI|}{|CF|}$.

**495**. Wykażemy, że *każda* dodatnia liczba wymierna ma przedstawienie wymaganej postaci. Weźmy dowolną liczbę wymierną $x>0$.

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy $1<x<2$; tak więc $x=m/n$ $(m,n\in\mathbb{N})$, $n<m<2n$. W tym przypadku wystarczy przyjąć

$$a=c=m+n,\quad b=2m-n,\quad d=2n-m;$$

wówczas $a+b=3m$, $ab=2m^2+mn-n^2$,

$$a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=3m(3m^2-3mn+3n^2),$$

podobnie wyrażamy $c^3+d^3$ i otrzymujemy

$$\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}=\frac{3m(3m^2-3mn+3n^2)}{3n(3n^2-3nm+3m^2)}=x.$$

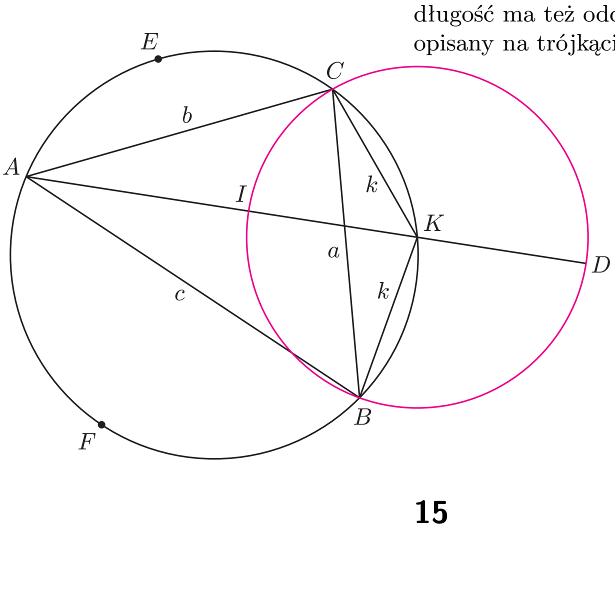
W przypadku ogólnym, gdy $x$ jest dowolną liczbą wymierną dodatnią, znajdujemy liczbę wymierną $y=k/\ell$ taką, że $1<xy^3<2$. W myśl konkluzji poprzedniego przypadku liczba $xy^3$ daje się zapisać jako ułamek

$$\frac{A^3+B^3}{C^3+D^3};\qquad A,B,C,D\in\mathbb{N}.$$

Stąd dostajemy żądane przedstawienie liczby $x$:

$$x=\frac{1}{y^3}\cdot\frac{A^3+B^3}{C^3+D^3}=\frac{(A\ell)^3+(B\ell)^3}{(Ck)^3+(Dk)^3}.$$

**496**. Punkt $K$,w którym prosta $AI$ przecina ponownie okrąg opisany na trójkącie $ABC$, jest środkiem łuku $BC$, więc cięciwy $KB$, $KC$ mają równą długość $k$. Tę samą długość ma też odcinek $KI$ (fakt znany lub łatwy do udowodnienia). Zatem okrąg opisany na trójkącie $BIC$ ma środek w punkcie $K$, a odcinek $ID$ jest jego średnicą.




Twierdzenie Ptolemeusza, zastosowane do czworokąta $ABKC$, daje równość $|AK|\cdot a=bk+ck$ (gdzie jak zwykle $a$, $b$, $c$ to długości boków trójkąta $ABC$). Stąd

$$\frac{|AI|}{|AD|}=\frac{|AK|-|KI|}{|AK|+|KI|}=\frac{\dfrac{bk+ck}{a}-k}{\dfrac{bk+ck}{a}+k}=\frac{b+c-a}{b+c+a}$$

i z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną trójki liczb wynika, że

$$\frac{|AI|}{|AD|}\cdot\frac{|BI|}{|BE|}\cdot\frac{|CI|}{|CF|}=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{c+a-b}{c+a+b}\cdot\frac{a+b-c}{a+b+c}\leqslant\frac{1}{27}.$$

Ponieważ dla trójkąta równobocznego zachodzi równość, szukane maksimum wynosi 1/27.