Albert Einstein (1879–1955) był nie tylko uczonym, ale też popularyzatorem fizyki, a w pewnym sensie także publicystą naukowym. Zamieszczony obok jego artykuł popularny „Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy” nie znany jest szerokim kręgom, zapewne dlatego, że Einstein opublikował go w mało znanym fizykom piśmie izraelskim [*Techical Journal* (Haifa), 1946, V, 16–17]. Niniejszy tekst jest tłumaczeniem z rosyjskiego przekładu artykułu [Albert Einstein, *Sobranije naucznych trudow*, tom 2, 650–652, Izd. „Nauka”, Moskwa 1966].

Elementarne wyprowadzenie równoważności masy i energii

Albert EINSTEIN

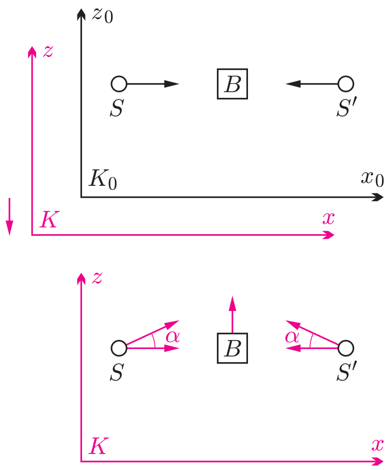
Przedstawione tu wyprowadzenie prawa równoważności, dotychczas nigdzie nie publikowane, ma dwie zalety. Chociaż wykorzystuje się w nim szczególną zasadę względności, nie wymaga to jednak stosowania formalnego aparatu teorii; dowód opiera się na trzech znanych wcześniej prawach:

(1) zasadzie zachowania pędu,

(2) wyrażeniu na pęd promieniowania, czyli – na pęd pakietu falowego poruszającego się w danym kierunku,

(3) znanym wyrażeniu dla aberracji światła (wpływu ruchu Ziemi na widziane z Ziemi położenie nieruchomych gwiazd, czyli – prawie Bradleya).

Aberracja światła, odkryta w 1726 r. przez astronoma angielskiego J. Bradleya, to zmiana położenia gwiazdy widzianej z Ziemi na skutek ruchu samej Ziemi. Aberracja roczna, uwarunkowana ruchem orbitalnym Ziemi wokół Słońca, widoczna jest jako ruch gwiazdy po maleńkiej (jak to widać z Ziemi) orbicie eliptycznej. Aberrację można poglądowo wyjaśnić jako wynik (wektorowego) sumowania się prędkości światłą gwiazdy i prędkości obserwatora (wraz z Ziemią).



Rozpatrzmy teraz następujący układ. Niech ciało B spoczywa swobodnie w przestrzeni względem układu odniesienia K_0, Dwa pakiety falowe S i S', o energii $E/2$ każdy, poruszają się odpowiednio w dodatnim i ujemnym kierunku osi x_0, padają na ciało i są przez nie pochłonięte. W wyniku tego procesu energia ciała zwiększa się o E. Ciało B pozostaje przy tym w spoczynku względem układu K_0, a wynika to z symetrii zdarzenia.

Rozważmy teraz ten sam proces z układu odniesienia K poruszającego się względem układu K_0 ze stałą prędkością o wartości v w ujemnym kierunku osi z_0. W układzie K rozważany proces opisuje się następująco: ciało B porusza się w dodatnim kierunku osi z z prędkością o wartości v. Kierunki dwóch pakietów falowych w układzie K tworzą z osią x kąt α. Zgodnie z prawem aberracji, w pierwszym przybliżeniu zachodzi związek: $\alpha = \dfrac{v}{\mathrm{c}}$, gdzie c – prędkość światła. Z rozważań dotyczących przebiegu procesu w układzie K_0 wiemy, że prędkość ciała B po pochłonięciu pakietów falowych S i S' nie ulegnie zmianie.

Zastosujemy teraz do naszego układu prawo zachowania pędu dla składowych w kierunku z w układzie K.

I. Niech M oznacza masę ciała B do chwili pochłonięcia pakietów falowych; w takim razie Mv jest pędem ciała B (zgodnie z mechaniką klasyczną). Każdy pakiet falowy ma energię $E/2$, a więc – zgodnie ze znanym wnioskiem z teorii Maxwella – jego pęd ma wartość $E/2\mathrm{c}$. Ściśle rzecz biorąc, tyle jest równym pęd pakietu falowego S względem układu odniesienia K_0. Kiedy jednak prędkość v jest mała w porównaniu z c, wówczas pęd w układzie K ma taką samą wartość – z dokładnością do wielkości małej drugiego rzędu ($\frac{v^2}{rmc^2}$ w porównaniu z 1). Wartość składowej tego pędu wzdłuż osi z jest równa $\dfrac{E}{2\mathrm{c}}\sin\alpha$, albo – z wystarczającą dokładnością (jeśli pominąć wielkości małe wyższych rzędów) – $\dfrac{E}{2\mathrm{c}}\alpha$, lub $\dfrac{E}{2}\,\dfrac{v}{\mathrm{c}^2}$. Zatem składowe pędów pakietów falowych S i S' wzdłuż osi z są w sumie równe $E\dfrac{v}{\mathrm{c}^2}$. Tak więc pęd całkowity układu przed aktem pochłonięcia jest równy

$$Mv + \frac{E}{\mathrm{c}^2}v.$$

Wobec tego, że $v \ll \mathrm{c}$, gdzie c – wartość prędkości światła, więc $\mathrm{c}_Z \cong \mathrm{c}_S - v$ i kąt aberracji $\alpha = \frac{v}{\mathrm{c}}$ (prawo Bradleya). Ten przybliżony wzór bardzo dobrze zgadza się z wynikami pomiarów, co oznacza, że w tym przypadku ($v \ll c$) wystarczającą dokładność obliczeń zapewnia klasyczna reguła składania prędkości Galileusza.

II. Niech M' oznacza masę ciała B po akcie pochłonięcia. Z góry bierzemy tu pod uwagę możliwość zwiększenia masy po pochłonięciu energii E (jest to konieczne na to, aby ostateczny wynik naszych obliczeń był niesprzeczny). Wobec tego pęd układu po akcie pochłonięcia będzie równy

$$M'v.$$

Skorzystamy wreszcie z zasady zachowania pędu dla składowych wzdłuż osi z. Daje to związek

$$Mv + \frac{E}{\mathrm{c}^2}v = M'v$$

lub

$$M' - M = \frac{E}{\mathrm{c}^2}.$$

Związek ten wyraża prawo równoważności energii i masy. Zwiększenie energii o E wiąże się ze wzrostem masy o $\frac{E}{\mathrm{c}^2}$. A wobec tego, że energię określa się zazwyczaj z dokładnością do stałej addytywnej, więc tę ostatnią możemy wybrać tak, aby zachodził związek:

$$E = M\mathrm{c}^2.$$

Ponieważ dla $\frac{v}{\mathrm{c}} \to 0$ transformacja Lorentza przechodzi w klasyczną transformację Galileusza, więc i wyrażenie na pęd ciała ma dla małych prędkości postać klasyczną. Związek $E = p\mathrm{c}$, spełniony dla świetlnej paczki falowej, może być udowodniony przy pomocy transformacji Lorentza i zasady względności bez uciekania się do równań Maxwella. Dowód jest elementarny, choć dosyć długi.

Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 645. Oszacować minimalną moc silnika nieruchomo unoszącego się w powietrzu śmigłowca o masie $M = 2000$ kg, promieniu wirnika $r = 5$ m, w powietrzu o gęstości $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Dla uproszczenia założyć, że wirnik tworzy skierowaną pionowo w dół strugę powietrza o jednorodnym rozkładzie prędkości i o przekroju koła o promieniu r, oraz pominąć mały wirnik w ogonie.
Rozwiązanie na str. 2

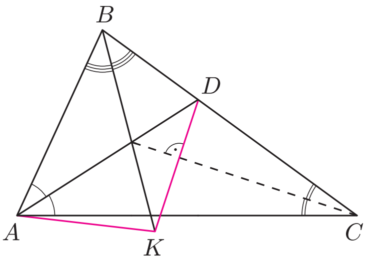
F 646. W silniku pewnej rakiety stała ilość spalin ΔM jest wyrzucana w czasie Δt do tyłu ze stałą prędkością u względem rakiety. Pokazać, że przyspieszenie rakiety rośnie wraz z ubytkiem paliwa. Czy tak samo rośnie moc silnika P?
Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Waldemar POMPE

M 1099. Liczby dodatnie a, b spełniają warunek $2a + 3b = 12$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{a}{3}\right)^n + \left(\frac{b}{2}\right)^n \geqslant 2\,.$$

Rozwiązanie na str. 2



M 1100. Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina bok BC w punkcie D (rys.). Prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do dwusiecznej kąta ACB przecina dwusieczną kąta ABC w punkcie K. Udowodnić, że $AK = DK$.
Rozwiązanie na str. 6

M 1101. Największy wspólny dzielnik liczb całkowitych dodatnich a i b jest równy 1. Dowieść, że największy wspólny dzielnik liczb $a + b$ i $a^2 + b^2$ nie przekracza 2.
Rozwiązanie na str. 7