Paradoksy dedukcji

Wiktor BARTOL

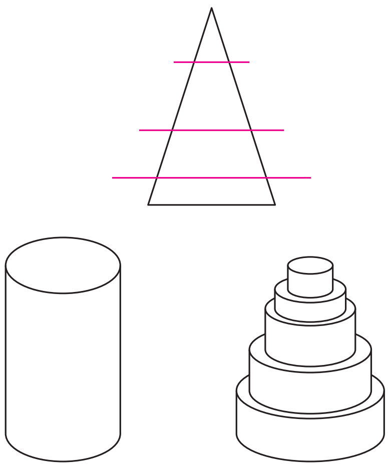
Paradoks – *twierdzenie niezgodne z powszechnie przyjętym mniemaniem, rozumowanie, którego elementy są pozornie oczywiste, ale wskutek zawartego w nim błędu logicznego lub nieostrości wyrażeń prowadzące do wniosków sprzecznych ze sobą lub z uprzednio przyjętymi założeniami.*
Encyklopedia Multimedialna PWN

Definicja paradoksu obejmuje różne sytuacje, powody i postacie paradoksów. Wobec tej różnorodności form spróbujmy dokonać klasyfikacji.

Paradoks w sensie potocznym – twierdzenie niezgodne z powszechnie przyjętym mniemaniem. Matematyka zna wiele twierdzeń, nazywanych paradoksami dlatego, że choć uzyskane *lege artis*, stoją w sprzeczności z potoczną intuicją. To, na przykład, twierdzenie Banacha–Tarskiego orzekające o możliwości rozkładu kuli na skończenie wiele części, z których można złożyć dwie przystające do niej kule, lub paradoks Skolema–Löwenheima o istnieniu przeliczalnego modelu teorii mnogości, teorii, która swoją siłę zawdzięcza temu, że dopuszcza istnienie zbiorów nieprzeliczalnych.

Ten przypadek paradoksu nie jest dla nas interesujący, gdyż świadczy o intuicjach raczej niż o samej matematyce. Zajmiemy się natomiast innymi postaciami paradoksów, o których niżej.

Aporia – trudność myślowa, wynikająca z nieumiejętności rozstrzygnięcia wartości argumentów za i przeciw pewnej tezie. Najbardziej znane aporie pochodzą sprzed około 2500 lat, z okresu, gdy m.in. w środowisku eleatów rozwijały się początki rozumowania dedukcyjnego. Paradoksy Zenona z Elei, służące do uzasadnienia tezy o niezmienności i niepodzielności bytu, są powszechnie znane, przyjrzyjmy się więc podobnemu rozumowaniu Demokryta (przełom V i IV wieku p.n.e). Wyobraźmy sobie stożek, który przecinamy płaszczyznami równoległymi do podstawy. Czy pola przekrojów są jednakowe dla każdej płaszczyzny, czy różne dla różnych płaszczyzn? Jeśli jednakowe, to stożek jest w istocie walcem. Jeśli różne, to stożek musi być bryłą podobną do piętrowego tortu (rysunek). Nie ma zatem dobrej odpowiedzi.



Czytelnika zainteresowanego tematem ciągłości gorąco zachęcam do sięgnięcia po książkę pt. *Ciągłość. Szkice z historii matematyki* Jerzego Mioduszewskiego, WSiP 1996.

Paradoks Demokryta jest bardzo bliski znanemu paradoksowi strzały Zenona z Elei. Chodzi tu o strukturę przestrzeni: jeśli odcinek (wysokość stożka) składa się z pojedynczych punktów, otrzymać musimy tort; jeśli jest nierozkładalną całością, otrzymujemy walec. Rozwiązanie przynosi dopiero nowożytne pojęcie przestrzeni, łączące oba te aspekty. Odcinek jest istotnie zbiorem punktów, jednak tzw. naturalny porządek tworzy z niego pewną całość, strukturę ciągłą bez luk i skoków, co tłumaczy ciągłą, a nie skokową zmianę pola przekroju stożka. Takie wyjaśnienie nie było jednak dostępne w czasach Demokryta i Zenona. Trudność wynikła z niedostatku dostępnego aparatu pojęciowego.

Przeskoczmy około 2400 lat, lądując na przełomie XIX i XX wieku. Teoria mnogości przekracza właśnie wiek niemowlęcy i wchodzi w dzieciństwo, legitymując się następującą definicją zbioru, wprowadzoną przez jej twórcę, niemieckiego matematyka Georga Cantora: „Zbiór to dowolna, traktowana jako całość mnogość M różnych dobrze określonych obiektów naszej intuicji lub umysłu, zwanych elementami M”.

Rozważmy zatem za Bertrandem Russellem, angielskim filozofem i logikiem, zbiór U określony następująco: $U = \{X : \ X \notin X\}$. Czy $U \in U$? Przedstawione na marginesie rozumowanie wykazuje, że $U \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U \notin U$.

Jeśli $U \notin U$, to U spełnia warunek przynależności do U, więc $U \in U$. Jeśli $U \in U$, to U nie spełnia warunku przynależności do U, a więc $U \notin U$.

Paradoks Russella wynika z nader ogólnej definicji zbioru, dopuszczającej tworzenie zbioru takiego jak U (który bez trudu ogarniamy umysłem jako całość). Wśród różnych odpowiedzi na ten niepożądany w matematyce paradoks przeważyła koncepcja oparcia teorii zbiorów na mocnych fundamentach aksjomatycznych, stanowiących pośrednio precyzyjną definicję zbioru, m.in. wykluczających możliwość tworzenia zbioru „wszystkich elementów” spełniających dany warunek. Taki zbiór można zbudować tylko z elementów zbioru już istniejącego. Źródłem paradoksu okazała się nieostrość definicji.

Antynomia – sprzeczność, wynikająca z rozumowania uznanego za poprawne i przesłanek uznanych za prawdziwe. Poszukując antynomii, cofnijmy się

Wiktor Bartol, Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

ponownie do czasów greckich. Eubulidesowi (IV wiek p.n.e.) przypisuje się wygłoszenie następującego zdania: „To, co teraz mówię, jest kłamstwem.” To paradoks kłamcy, który w dzisiejszym języku moglibyśmy zapisać jako zdanie Z: *Zdanie Z jest fałszywe.* Zdanie Z jest oczywiście prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest fałszywe.

Jeśli zdanie Z jest prawdziwe, to prawdą jest to, co orzeka, a więc Z jest fałszywe. Jeśli natomiast Z jest fałszywe, to nie jest prawdą to, co głosi, a zatem nie jest fałszywe – jest więc prawdziwe.

Rozumowanie przedstawione na marginesie wydaje się sugerować, że problem bierze się ze zbyt małej liczby wartości logicznych: zdanie niefałszywe uznajemy od razu za prawdziwe. Pomyślmy zatem o logice, w której prawda i fałsz nie są jedynymi wartościami logicznymi i zastanówmy się nad zdaniem Z_1 o treści następującej: *Zdanie Z_1 nie jest prawdziwe.* Ponownie otrzymujemy paradoksalną sprzeczność: zdanie Z_1 jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdziwe.

Jeśli zdanie Z_1 jest prawdziwe, to prawdą jest, że nie jest prawdziwe – a więc nie jest prawdziwe. Jeśli natomiast zdanie Z_1 nie jest prawdziwe, to orzeka prawdę, jest zatem prawdziwe.

Mamy sytuację bardzo niepokojącą: poprawne rozumowanie prowadzi do paradoksalnego wniosku, mimo wprowadzenia nowych wartości logicznych.

Paradoks kłamcy bywa niekiedy przypisywany temu, że mamy do czynienia ze zdaniem, które orzeka samo o sobie. Obok widać jednak dwa zdania, z których żadne nie mówi samo o sobie, ale razem tworzą całość równie paradoksalną jak paradoks kłamcy. Czytelnik może sprawdzić, że można utworzyć zestaw trzech, czterech lub większej liczby zdań, które razem dadzą podobny efekt. Należałoby więc odrzucić możliwość powracania do pierwszego zdania, nawet jeśli po drodze przechodzimy przez kilka innych?

Z_1: Zdanie Z_2 jest fałszywe.

Z_2: Zdanie Z_1 jest prawdziwe.

Popatrzmy na następny przykład. Dla każdego $n \in N$ niech zdanie Z_n stwierdza co następuje: *Dla każdego $k > n$, zdanie Z_k jest fałszywe.* Jeśli zdanie Z_n jest prawdziwe (dla pewnego n), to wszystkie zdania Z_k, gdy $k > n$, są fałszywe, w szczególności zdanie Z_{n+1}. Jednocześnie zdanie Z_{n+1} jest też prawdziwe, bo wszystkie zdania Z_k, gdy $k > n + 1$, są fałszywe – sprzeczność. Wniosek: wszystkie zdania Z_k muszą być fałszywe. Ale wtedy każde z nich jest prawdziwe i w rezultacie jednocześnie prawdziwe i fałszywe!

Z_1: Dla każdego $k > 1$, Z_k jest fałszywe.

Z_2: Dla każdego $k > 2$, Z_k jest fałszywe.

...

Z_n: Dla każdego $k > n$, Z_k jest fałszywe.

...

Budowanie zdań – jeśli nie ma prowadzić do paradoksów – musi zatem być poddane pewnym rygorom, podobnie jak budowanie zbiorów. Przede wszystkim, należy jasno rozróżniać poziomy języka. Jeśli zdanie Z należy do jakiegoś języka (np. języka opisu pewnej rzeczywistości), to zdanie mówiące o zdaniu Z powinno być na poziomie wyższym niż poziom samego zdania Z. Przy takim wymogu zdanie mówiące samo o sobie zostałoby wykluczone jako niezgodne z regułami. Co więcej, hierarchia poziomów nie może dopuszczać cykliczności, to znaczy jeśli poziom k jest niższy niż poziom l, to poziom l nie może być niższy niż k. W ten sposób eliminujemy cykle zdań, takie jak zdania Z_1 i Z_2 na marginesie. Wreszcie, hierarchia poziomów musi być dobrze ugruntowana: schodząc na coraz niższy poziom, po skończonej liczbie kroków musimy trafić na poziom, z którego już niżej nie ma dokąd pójść. Pozbywamy się wtedy sytuacji takich, jak w nieskończonym ciągu zdań powyżej.

Jak widać, aporie i antynomie niekiedy skłaniały do istotnych zmian w konstrukcji teorii, niekiedy inspirowały ważne wyniki (dowód twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki jest rozwiniętą trawestacją paradoksu kłamcy). Tak jak gorączka wskazuje na potrzebę interwencji lekarskiej, tak paradoksy wskazują na luki w konstrukcji teorii i na potrzebę interwencji jej twórców.

Pozostawiliśmy na boku jeszcze jeden rodzaj paradoksów: to te, które powstają w wyniku błędu logicznego. Ciekawe są zwłaszcza te zamierzone.

Sofizmat – rozumowanie często świadomie błędne, mające na celu oszukanie słuchacza lub czytelnika. Przykład? Udowodnimy, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe jest zdanie: $(\forall m \in N)(m \leqslant n \Rightarrow m = n)$.

Dowód indukcyjny: Gdy $n = 1$ i $m \leqslant n$, to $m = 1 = n$, gdyż 1 jest najmniejszą liczbą naturalną. Załóżmy, że dla pewnej liczby naturalnej n zdanie jest prawdziwe i niech $m \leqslant n + 1$. Wtedy $m - 1 \leqslant n$ i z założenia indukcyjnego $m - 1 = n$. Stąd już mamy równość $m = n + 1$.

Czytelnik łatwo sam wywnioskuje z tego twierdzenia, iż $\mathrm{e} = \pi$.