Paradoksalna gra

Większość znanych gier ma tę miłą własność, że kończy się po skończonej liczbie ruchów. Gdyby jednak gra polegała na tym, że gracze na przemian wskazują liczby naturalne, a wygrana na tym, że przeciwnik nie może już wskazać liczby większej, to taka gra musiałaby trwać nieskończenie długo (jeśli na chwilę zapomnimy o prawach biologii...).

Nazwijmy te pierwsze gry – kończące się zawsze po skończonej liczbie ruchów – grami normalnymi i zajmijmy się grą, której odpowiednią nazwą będzie „gra uniwersalna".

Oto reguły:

(1) Pierwszy gracz wybiera grę normalną.

(2) Drugi gracz wykonuje pierwszy ruch wybranej gry.

(3 –) Gracze wykonują na przemian ruchy wybranej gry zgodnie z jej regułami i zgodnie z jej regułami wyznaczają zwycięzcę.

Widać już, dlaczego gra jest „uniwersalna". A czy gra uniwersalna jest normalna?

Zbadajmy wszystkie możliwości. Jeśli gra uniwersalna jest normalna, to można ją wybrać w pierwszym jej ruchu. Oto, jak mogłaby wtedy wyglądać rozgrywka:

(1) Pierwszy gracz wybiera grę uniwersalną.

(2) Drugi gracz wykonuje jej pierwszy ruch, który polega na wyborze gry normalnej. Wybiera grę uniwersalną.

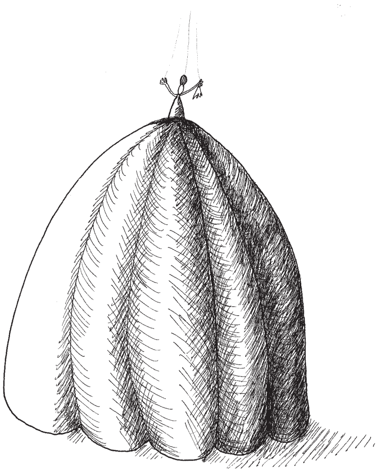
(3) Pierwszy gracz wykonuje kolejny ruch w grze uniwersalnej, czyli wybiera grę normalną. Wybiera grę uniwersalną.

($4 - \infty$) Gracze na przemian wybierają grę uniwersalną.

Okazało się, że założenie, iż gra uniwersalna jest normalna, prowadzi do nieskończonej rozgrywki. Tak więc gra ta nie jest normalna.

Ale jeśli nie jest normalna, to nie wolno jej wybrać w pierwszym jej ruchu. Trzeba wybrać grę naprawdę normalną, a wtedy rozgrywka zakończy się w skończonej liczbie ruchów. Tyle tylko, że jeśli gra uniwersalna kończy się zawsze po skończonej liczbie ruchów, to... jest normalna. Wyszło na to, że gra uniwersalna jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest normalna. Paradoks!

Takie lub podobne paradoksy pojawiały się nieraz w matematyce i logice. Niekiedy wynikały z nie dość precyzyjnego określania pojęć, niekiedy z nadmiaru swobody w budowaniu zdań. Jak ocenić słynne zdanie kłamcy, który powiada: „To, co teraz mówię, jest kłamstwem"? Prawdę mówi, czy kłamie? Cechą istotną tego zdania jest to, że mówi samo o sobie. Tak jak gra uniwersalna, która „gra w samą siebie". W tym kryje się niebezpieczeństwo.



Dlatego matematycy najczęściej wykluczają podobne konstrukcje z arsenału dopuszczalnych środków. Trochę szkoda, ale przecież matematyka na paradoksach rosnąć nie może!

Wiktor BARTOL