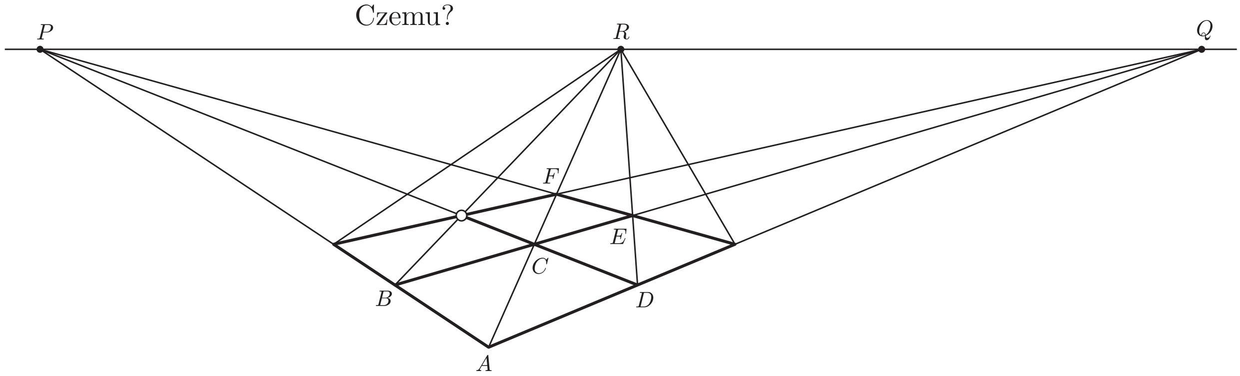
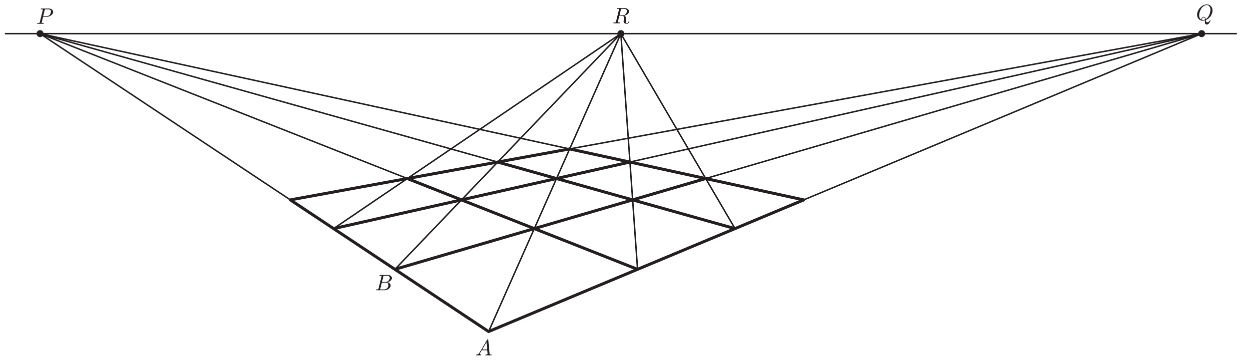
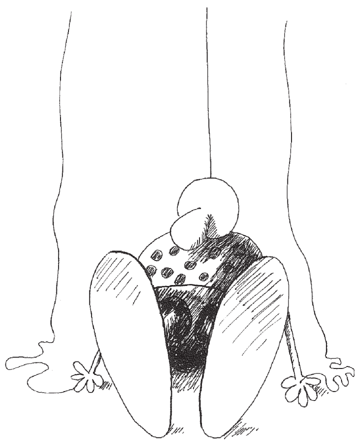
Narysuj i pomyśl

Chcemy narysować siatkę kwadratów leżących na poziomej płaszczyźnie. W tym celu rysujemy poziomą prostą – horyzont płaszczyzny – a na niej obieramy dwa punkty P i Q: będą to kierunki boków kwadratów. Niech jeszcze R (narysujmy go jako środek PQ) będzie kierunkiem jednej z przekątnych kwadratów. Obierzmy dodatkowo punkt A – wierzchołek jednego z kwadratów siatki – i na prostej AP punkt B – sąsiedni wierzchołek. To pozwala już jednoznacznie nakreślić siatkę – należy po prostu przez kolejne punkty rysować kolejne proste o właściwych kierunkach. Na rysunku poniżej prosta BQ (bok) przecina prostą AR (przekątną) w punkcie C – jest to trzeci wierzchołek kwadratu. Prosta PC pozwala znaleźć D – czwarty wierzchołek. Przecięcie BQ z DR daje E. Prosta EP daje kolejny kwadrat siatki. I teraz widzimy, że czy przetniemy BR z CP, czy też z FQ, otrzymamy ten sam punkt. Czemu?



Jeśli nawet nie umiemy odpowiedzieć na to pytanie, możemy kontynuować rysowanie, otrzymując coraz to więcej kwadratów siatki.





Teraz coraz więcej prostych będzie przechodzić przez liczne, otrzymane w rozmaity sposób punkty i wypada pomyśleć, czemu się tak dzieje? Można też spróbować coś pomierzyć: okazuje się, że

$$|BC| \cdot |EQ| = |BQ| \cdot |EC|, \quad \text{podobnie} \quad |AC| \cdot |FR| = |AR| \cdot |FC|,$$

choć niczego nie odmierzaliśmy – czemu?

Wszystkie „drugie" przekątne kwadratów siatki okazują się równoległe do PQ – dlaczego?

A gdy narysujemy R w innym miejscu odcinka PQ i powtórzymy rysunek, to wszystkie „drugie" przekątne przetną się w jednym punkcie S leżącym na prostej PQ i spełniającym warunek

$$|PR| \cdot |QS| = |PS| \cdot |QR|.$$

Czemu tak się dzieje?

Odpowiedź brzmi: to są twierdzenia geometrii rzutowej. *Disce puer geometriae!* (oczywiście *puella* też nie powinna się wzbraniać).

Marek KORDOS