Wiosną 2004 roku na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego odbył się cykl imprez pod wspólnym tytułem ***Konfrontacje Matematyczne***. Były to cztery pary wykładów. Każda para wykładów miała wspólny temat, przy czym jeden z wykładających był matematykiem, a drugi – przedstawicielem całkowicie odmiennej dyscypliny. Numer jest sprawozdaniem z tych konfrontacji archeologa, prawnika, historyka sztuki i filologa z matematykami.

Krótkie rozmowy między sumerologiem a matematykiem

Marek STĘPIEŃ,
Jerzy TYSZKIEWICZ

(Awers)
1. 59 gu2 mangaga
2. ki *ur-{d}li9-si4*-na
3. ensi2 umma{ki}
4. *u-bar-um*
5. szu ba-an-ti
6. sza3 i-szim-{d}szul-gi{ki}-ra

(Rewers – niewidoczny na zdjęciu)
1. ugula *nu-i-da*
2. giri3 *ur-{d}nin-gubalag* sukkal

(pusta linia)
3. iti ezem me-ki-gal2-la
4. mu en {d}nanna ba-hun

Marek Stępień, Instytut Historyczny Uniwersytetu Warszawskiego

Jerzy Tyszkiewicz, Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

W roli sumerologa *Marek Stępień*, w roli matematyka *Jerzy Tyszkiewicz*.

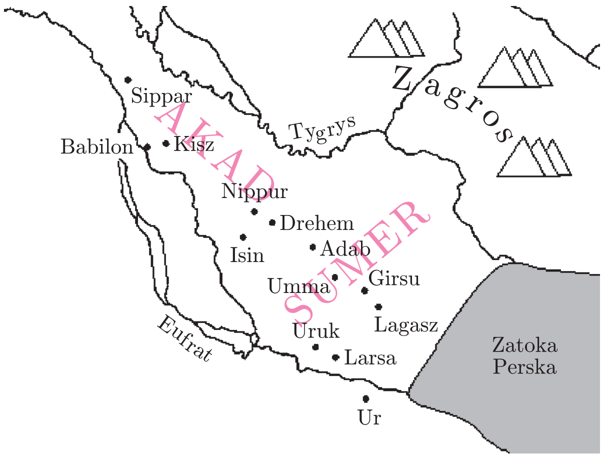
AKT PIERWSZY

Sumerolog: Zobacz, co ze sobą przyniosłem. To gliniana tabliczka zapisana znakami klinowymi w języku sumeryjskim przed 4 tysiącami lat.

Matematyk: Śliczna! A co na niej jest napisane?

S: To pokwitowanie na 59 talentów (`gu2`) liści palmowych (`mangaga`), które Ur-Lisi, gubernator (`ensi2`) miasta Umma, przekazał człowiekowi o imieniu Ubarum. Zapewne ensi sam tym towarem się nie zajmował, a tylko formalnie jest wymieniony na tabliczce jako główny zarządca majątku państwowego na tym terenie. Był on również odpowiedzialny za wysłanie poza prowincję liści zebranych z gajów państwowych. Ur-Ningubalag, posłaniec (`sukkal`), miał je przetransportować do miejscowości Iszim-Szulgi, gdzie głównym zwierzchnikiem pracowników (`ugula`) był Nuida. Transliterację tekstu masz obok, a tłumaczenie właśnie poznałeś.

To wszystko działo się w państwie III Dynastii z Ur, która rządziła Mezopotamią w XXI wieku przed naszą erą. Dokładnie, było to w XI miesiącu 9. roku panowania króla Amar-Suena (data to ostatnie dwie linijki).



M: I co się potem stało z tą masą liści? Kiedyś mi mówiłeś, że talent to około 30 kilogramów, więc ten transport to było ponad 1,7 tony.

S: Nie wiadomo. Nie znaleziono dotąd żadnej tabliczki, na której można by o tym przeczytać. Zapewne wykorzystano ten materiał przy jakichś budowach.

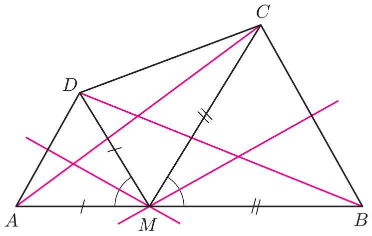
M: A zdarza się, że można prześledzić losy jakiegoś towaru lub człowieka na kilku tabliczkach?

S: Tak, znanych jest wiele takich przykładów. Popatrz na tę parę dokumentów:

	(Awers)	
1) 47 geme2 usz-bar	47 tkaczek	1) 47 geme2 usz-bar
2) en-du8-du-ta	z Endudu	2) gi zi ga6-ga2
3) e2-masz-sze3	do Emasz	3) en-du8-du-ta
4) gi-zi ga6	trzcinę nosiło	4) e2-masz-sze3
5) gurum2 ak u4 8-kam	kontrola 8. dnia	5) ugula *i3-kal-la*
	(Rewers)	
1) ugula *i3-kal-la*	nadzorca Ikalla	1) IGI-NIG2 ak u4 22-kam
giri3 *ad-da*	pośrednik Adda	2) giri3 *ad-da*
2) iti ezem {d}szul-gi	miesiąc X	3) iti ezem {d}szul-gi
8) mu *{d}i-bi2-{d}suen*	rok Ibi-Suen	4) mu *{d}i-bi2-{d}suen*
lugal	królem	lugal

W prawym tekście pojawia się 22. dzień zamiast 8., a kolejność informacji jest lekko zmieniona.

Rozwiązanie zadania M 1096.
Z równości $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ wynika, że $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$, a więc również $\sphericalangle AMC = \sphericalangle DMB$.

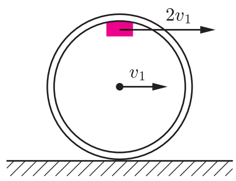


Ponadto $AM = DM$ oraz $BM = CM$. Stąd wynika, że trójkąty AMC i DMB są przystające, a zatem $AC = BD$.

Rozwiązanie zadania F 643.
W momencie, gdy klocek znajduje się w najniższej pozycji, całkowita energia układu składa się tylko z energii kinetycznej ruchu obrotowego i postępowego rurki:

$$E = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{MR^2}{2}\cdot\frac{v_0^2}{R^2} = Mv_0^2,$$

a w położeniu najwyższym dochodzi energia kinetyczna i potencjalna klocka (rysunek).



$$E = Mv_1^2 + \frac{m(2v_1)^2}{2} + 2mgR = Mv_1^2 + 2mv_1^2 + 2mgR.$$

Warunek, aby układ toczył się, a nie „bujał", to $v_1^2 > 0$, a warunek nieoderwania się klocka w najwyższym położeniu to

$$m\frac{v_1^2}{R} > mg,$$

czyli $v_1^2 > gR$. Drugi warunek jest silniejszy od pierwszego, więc zajmiemy się tylko nim. Z zasady zachowania energii otrzymujemy

$$v_1^2 = \frac{Mv_0^2 - 2mgR}{M + 2m},$$

a po podstawieniu do warunku

$$v_0 > \sqrt{gR\left(1 + \frac{4m}{M}\right)}.$$

W rzeczywistości podobnych tabliczek jest 8, tkaczek raz jest o kilka więcej, a raz o kilka mniej. Wygląda, że nosiły tę trzcinę z Endudu do Emasz codziennie przez prawie cały X miesiąc owego roku.

M: Fantastyczne. Czy warto byłoby szukać dalszych takich grup tekstów?

S: Oczywiście, ale ostrzegam, że to strasznie pracochłonne zajęcie.

AKT DRUGI

M: Cześć, Marku! Mówiłeś, że warto szukać par powiązanych ze sobą dokumentów. Zabrałem się za to i mam chyba pewne efekty. Czy chciałbyś rzucić na nie okiem, żeby mi powiedzieć, co naprawdę znalazłem i jaką to ma wartość?

S: Pokaż, co tam masz! Rzeczywiście! To dokumenty wypłat dla tkaczek pracujących w zakładzie tekstylnym. Płaca była „w naturze", tutaj jest mowa o przydziałach zboża – jednostką jest `sila3`, taki sumeryjski litr.

`1) 18 geme2 50 sze lugal-ta`	18 pracownic po 50 sila	`1) 18 geme2 50 sze lugal`
`2) 134 geme2 30-ta`	134 pracownice po 30 sila	`2) 134 geme2 30-ta lugal`
`3) 5 geme2 a2 1/2 30-ta`	5 pracownic na pół etatu po 30 sila	`3) 5 geme2 a2 1/2 30-ta`
`4) 4 geme2 szu-gi4 20-ta`	4 stare pracownice po 20 sila	`4) 4 geme2 szu-gi4 20-ta`
`5) 19 dumu 20-ta`	19 dzieci po 20 sila	`5) 19 dumu 20-ta`
`6) 25 dumu 15 sila3-ta`	25 dzieci po 15 sila	`6) 25 dumu 15 sila3-ta`
`7) 41 dumu 10-ta`	różnica! po lewej 41, po prawej 43 dzieci po 10 sila	`7) 43 dumu 10-ta`
`8) 1 gurusz szu-gi4 50`	1 stary pracownik po 50 sila	`8) 1 gurusz szu-gi4 i3-du8 50`
`9) sze-bi 6365 sila3 gur`	podsumowania sze-bi różnią się o wypłatę dla 2 dzieci po 10 sila	`9) sze-bi 6385 sila3 gur`

`10) iti 1-kam iti 3-sze3`
`11) szu+nigin2 19095 sila3 gur`
`12) sze-ba geme2 usz-bar`
`13) ugula` *ur-{d}da-mu*
`14) iti ezem {d}ba-u2-ta`
`15) iti amar-a-a-si-sze3`
`16) mu sza-asz-ru-um{ki} ba-hul`
	Wprowadzono podsumowanie znakiem `szu+nigin2` po lewej, bo ten dokument obejmuje miesiące od VIII do X roku, w którym Szaszrum zostało zniszczone, a prawy tylko jeden, XI miesiąc tego roku, więc dodatkowego podsumowania nie ma. Nadzorca tej pracy to Ur-Damu, ten sam w obu dokumentach.	`10) sze-ba geme2 usz-bar`
		`11) ugula` *ur-{d}da-mu*
		`12) iti sze-KIN-ku5`
		`13) mu sza-asz-ru-um{ki} ba-hul`

Wygląda, że w dokumentach zachował się ślad po narodzinach dwojga dzieci. To, że są wymienione na liście płac, nie znaczy, że same naprawdę tkały, a raczej, że ich matki dostawały na nie zasiłek socjalny (4 tysiące lat temu!) wypłacany przez pracodawcę. Podobnie było zapewne ze starymi pracownikami wspomnianymi w tekście. To byli w rzeczywistości emeryci.

M: A czy to ważne odkrycie?

S: W każdym razie – ciekawe. Na pewno trzeba będzie zmienić pogląd na datowanie obu tabliczek. Spójrz na ich sygnatury: lewa to BM 17970=ZT 2017=ASJ (AS6/m08), a prawa BM 20461=SAT 1:276 (S42/m11). Czyli pierwsza jest datowana na 6. rok panowania Amar-Suena (AS6), a druga na 42. rok panowania jego ojca Szulgiego (S42). Obydwaj w tych latach niszczyli miasto Szaszrum i umieścili ten czyn w datach rocznych tabliczek (ostatnie linie obu tekstów). Widać z porównania tabliczek, że jeden z tłumaczy miał rację, a drugi się mylił co do wyboru roku.

Zestawienie tych tabliczek potwierdza regularność comiesięcznych wypłat dla pracownic tkalni państwowych oraz dla osób objętych opieką społeczną. To istotne ustalenia.

Ale jak wpadłeś na to, żeby je porównać? Dla mnie jedynym łącznikiem jest imię Ur-Damu, popularne w owych czasach. Nosiło je wielu ludzi, z których zresztą żaden nie zrobił jakiejś oszałamiającej kariery.

M: Spójrz na sekwencje liczb na tabliczkach. To one je zdradziły. Są prawie identyczne (jedyna różnica to 41 / 43) aż do miejsca, gdzie zaczynają się podsumowania. Moi studenci napisali program, który z tekstów tabliczek zebranych w bazie danych (sam zresztą uczestniczyłeś w jej tworzeniu) wydobył

Rozwiązanie zadania F 644.
W sytuacji, gdy pierścienie są w równowadze, siła odśrodkowa (w układzie nieinercjalnym związanym z prętem) musi równoważyć siłę sprężystości:

$$\omega^2(l+\Delta l) = \frac{k\cdot\Delta l}{m},$$

gdzie Δl to wydłużenie pojedynczej sprężyny, a stąd

$$\Delta l = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2}.$$

Widzimy, że położenie równowagi będzie istnieć tylko wtedy, gdy $k > m\omega^2$, w przeciwnym przypadku po rozpędzeniu układu pierścienie będą oddalać się, aż zależność siły od wydłużenia sprężyn przestanie być liniowa bądź sprężyny zerwą się.

Moment bezwładności wynosi

$$2m(l+\Delta l)^2 = \frac{2mk^2l^2}{(k-m\omega^2)^2},$$

a energia kinetyczna to

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2k^2l^2}{(k-m\omega^2)^2}$$

i jest większa niż energia kinetyczna w przypadku, gdy pierścienie są sztywno zamocowane.

tylko sekwencje liczb, a następnie specjalnie zaadaptowany algorytm, zaczerpnięty z dziedziny biologii obliczeniowej, porównywał te ciągi z różnych tabliczek, oceniając ich podobieństwo na podstawie długości dopasowanych fragmentów i częstości występowania dopasowanych liczb. Te dwie okazały się bardzo podobne pod tym względem. Mam setki albo i tysiące innych par, które również zasługują na sprawdzenie.

S: Czy możesz to dokładniej wyjaśnić?

M: Hmmm, będę musiał mówić językiem dość matematycznym, ale spróbujmy.

W moim eksperymencie miarą podobieństwa dwóch dokumentów jest suma nagród i kar za następujące operacje: wymiany, usunięcia i wstawienia, niezbędne do zamiany ciągu liczb z jednego dokumentu w ciąg liczb z tego drugiego. Nagrody i kary ustalamy na podstawie tego, jak często poszczególne liczby występują wśród wszystkich znanych nam tekstów. Im liczba jest rzadsza, tym większa nagroda za to, że, mówiąc obrazowo, pasuje do siebie w obu dokumentach.

Bardziej formalnie, w celu porównania dwie sekwencje liczb mogą być ze sobą *uliniowione*, co polega na wstawieniu do nich spacji (czyli wolnych miejsc, oznaczanych poniżej kreskami), by osiągnęły identyczną długość, napisaniu ich pod sobą i policzeniu kar i nagród. Najlepiej rozważyć to na przykładzie poprzednich dokumentów. W uliniowieniu

18	50	134	5	4	19	25	15	41	1	50	6365	19095
18	50	134	5	4	19	25	15	43	1	50	6385	–

mamy 9 nagród za zgodność liczb, jedną karę wewnątrz ciągu za niezgodność 41 i 43, oraz jedną niezgodność i jedna spację na końcach sekwencji. Tych ostatnich nigdy się nie liczy, więc wychodzi w sumie 9 nagród i 1 kara. Nagrody są różne: za zgodność dwóch liczb 134 jest większa niż za zgodność dwóch jedynek, bo te drugie są nieporównanie częstsze i mniej z ich dopasowania wynika. Z pewnych przyczyn matematycznych kara za dopasowanie liczb to – wybacz mi słowa, które tu padną – minus logarytm przy podstawie 2 z względnej częstości występowania konkretnej liczby w całym zbiorze dostępnych dokumentów. Kara za niezgodność też jest wyliczana stosowną formułą matematyczną, ale nie zależy od tego, jakie konkretnie liczby do siebie nie pasują. Niestety, nie ma jeszcze teorii matematycznej, która pozwalałaby wyprowadzić wzór na karę za spację, więc jest ona dobierana przez nas eksperymentalnie i też nie zależy od tego, jaka liczba stoi naprzeciwko. *Wartość* uliniowienia to suma kar i nagród dla wszystkich miejsc.

S: A po co te spacje, skoro są z nimi kłopoty?

M: Użyłbym ich, gdyby np. kilka liczb z jednego tekstu było uszkodzonych i przez to nieczytelnych, albo w większym tekście gdzieś w trakcie wyliczenia pojawiło się podsumowanie cząstkowe, a w tym drugim, podobnym, nie byłoby go.

S: Czy z tego wynika, że żeby się twoją metodą posłużyć, będę musiał powtórzyć logarytmy ze szkoły?

M: Nie, choć nie wiem, co ci się w logarytmach nie podoba. Prawda jest taka, że napisałem program komputerowy, który wyszukuje najlepsze uliniowienia, czyli te, które mają największą wartość – zauważ, że mogąc wstawiać spacje, te same dwa ciągi liczb można uliniowić ze sobą na ogromną liczbę sposobów i wcale niełatwo jest odszukać ten najlepszy. W moim przykładzie uliniowienie jest optymalne, co nietrudno zauważyć. Do jego znalezienia wykorzystałem algorytm Smitha–Watermana, który jest używany przez genetyków molekularnych do porównywania chemicznych sekwencji białek w różnych organizmach. [Był omówiony w *Delcie* 10/2002.] Mój program po prostu odpowiada na pytanie, jak podobne są dwa dokumenty i już. A potem kazałem mu sprawdzać dokumenty z naszej bazy danych każdy z każdym i wypisywać te pary, które uznał za wystarczająco podobne. Obliczenia trwały trochę ponad tydzień ciągłej pracy procesora. Teraz przyniosłem ci pierwsze 1800 par do przejrzenia. Oczywiście, będę miał ich więcej.

S: Jeśli jest tak, jak mówisz, będę miał co robić.

M: Ja też, bo mojej metodzie daleko do doskonałości. Zauważ, że nie sposób nią wychwycić podobieństwa dokumentów o tkaczkach noszących trzcinę, bo liczb na nich za mało, a w dodatku mówiłeś, że nie są one zawsze identyczne. Z kolei ta ogromna ilość liści palmowych na dalszych dokumentach pojawiała się zapewne już podzielona na mniejsze porcje. Tematów do przyszłych rozmów na pewno nam nie zabraknie.

KURTYNA