Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2005

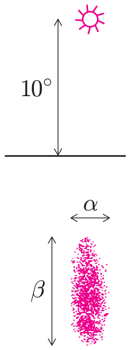
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 398, 399

Redaguje Jerzy B. BROJAN

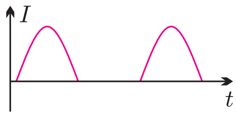
398. Po jeziorze biegną liczne drobne fale, których kierunki zmieniają się dowolnie, a maksymalne nachylenie powierzchni wody wynosi $\gamma = 2°$. Obserwujemy odbicie w wodzie Słońca, które jest na wysokości $\varphi = 10°$ nad horyzontem. Ocenić rozmycie kątowe odbitego obrazu Słońca, wzdłuż osi „w poprzek" (kąt α na rysunku 1) i „wzdłuż" (kąt β).



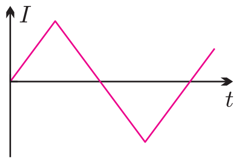
Rys. 1

399. Amperomierz przeznaczony do pomiaru natężenia prądu zmiennego może działać na następujących zasadach:
1) mierzyć średnią wartość kwadratu natężenia prądu (poprzez np. pomiar siły wzajemnego oddziaływania dwóch cewek),
2) mieć wbudowany prostownik dwupołówkowy prądu i mierzyć amplitudę natężenia prądu wyprostowanego,
3) mieć wbudowany prostownik dwupołówkowy i mierzyć średnią wartość natężenia prądu wyprostowanego.

Mamy trzy amperomierze A_1, A_2 i A_3 działające według powyższych zasad, przy czym skala wszystkich amperomierzy jest tak dobrana, że w przypadku prądu o przebiegu sinusoidalnym wskazują one wartość skuteczną natężenia. Jakie będą wskazania amperomierzy A_2 i A_3, jeśli amperomierz A_1 wskazuje 1 A, a prąd jest a) stały, b) o przebiegu jednopołówkowym (tzn. połowa sinusoidy, rys. 2), c) o przebiegu piłokształtnym (rys. 3)?



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2005

Przypominamy treść zadań:

390. Z równi pochyłej o kącie nachylenia α stacza się kula o masie M zawierająca współśrodkowe kuliste wydrążenie, przy czym stosunek wewnętrznego promienia do zewnętrznego (wynoszącego R) jest równy k, a poza wydrążeniem rozkład masy jest jednorodny. Wewnątrz kuli toczy się podobnie wydrążona kulka o masie m, zewnętrznym promieniu r i tej samej wartości k. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby środki kul i punkt zetknięcia większej z równią leżały stale na tej samej prostej (rys.)?

391. Jak długo mogłoby świecić Słońce z niezmienioną mocą, gdyby czerpało wypromieniowaną energię: a) ze spalania węgla (załóżmy, że Słońce składa się z węgla i tlenu), b) z grawitacyjnego zapadania się (załóżmy, że Słońce zmniejszyło swój promień o 10%)? Niezbędne dane należy wziąć z tablic. Wystarczy przybliżona ocena wyniku.

390. Oznaczmy prędkość środków obu kul przez v. Prędkość kątowa dużej kuli (Ω) jest powiązana z v wzorem $\Omega = v/R$, a prędkość liniowa punktu styku kul względem układu związanego z ich środkami wynosi $k\Omega R$. Przyrównując to wyrażenie do ωr (gdzie ω – prędkość kątowa małej kuli), znajdujemy $\omega = kv/r$. Te same związki obowiązują dla przyspieszenia liniowego a, przyspieszenia kątowego dużej kuli ε_1 oraz małej kuli ε_2, tzn. $\varepsilon_1 = a/R$, $\varepsilon_2 = ka/r$. Oznaczmy przez X składową poziomą siły wzajemnego oddziaływania kul, a przez Y – składową pionową. Zgodnie z II zasadą dynamiki ruchem postępowym małej kuli rządzą równania $X = ma\cos\alpha$, $mg - Y = ma\sin\alpha$, a ruchem obrotowym – równanie $Yr\sin\alpha - Xr\cos\alpha = I_2\varepsilon_2$. Centralny moment bezwładności wydrążonej kuli wyraża się wzorem $I_2 = \frac{2}{5}mr^2\frac{1-k^5}{1-k^3}$, podobnie $I_1 = \frac{2}{5}MR^2\frac{1-k^5}{1-k^3}$. Dla dużej kuli najwygodniej jest rozpatrywać ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu, przechodzącej przez punkt styczności z podłożem. Ramionami sił X i Y (które – zgodnie z III zasadą dynamiki – należy tu uwzględnić z przeciwnym zwrotem) są składowe odcinka łączącego punkty styczności, którego długość wynosi $R(1-k)$. Równanie ruchu obrotowego ma postać $MgR\sin\alpha + YR(1-k)\sin\alpha - XR(1-k)\cos\alpha = (I_1 + MR^2)\varepsilon_1$.

Po wyeliminowaniu sił i przyspieszeń dochodzimy do prostego wyniku $M = km$. Z warunkiem współliniowości środków kul i punktu zetknięcia z podłożem zgodny jest też przypadek graniczny, odpowiadający przejściu $k \to 1$ (kule stają się bardzo cienkimi łupinami) – inne parametry są wtedy nieistotne.

391. a) Masa Słońca wynosi $2\cdot 10^{30}$ kg, z czego początkowo mogłoby być 27% węgla, tzn. około $5\cdot 10^{29}$ kg. Przyjmując ciepło spalania równe 40 MJ/kg, obliczamy całkowitą energię równą $2\cdot 10^{37}$ J. Aby wyznaczyć moc wypromieniowaną, pomnóżmy stałą słoneczną (tzn. moc promieniowania na jednostkę powierzchni prostopadłej), która w okolicy Ziemi wynosi 1,35 kW/m^2, przez $4\pi R^2$, gdzie R jest promieniem orbity ziemskiej ($1{,}5\cdot 10^{11}$ m). Stąd moc $P \approx 4\cdot 10^{26}$ W, czyli energii zawartej w węglu wystarczyłoby na $5\cdot 10^{10}$ s $\approx$ 1500 lat.
b) Promień Słońca wynosi $7\cdot 10^8$ m, a stąd przyspieszenie grawitacyjne na jego powierzchni – 270 m/s^2. Do celów orientacyjnej oceny uzyskanej energii przyjmijmy, że 1/5 masy Słońca „spada" w polu o powyższym natężeniu z wysokości równej 1/10 promienia. Wyliczona wartość mgh okazuje się równa $8\cdot 10^{39}$ J, co wystarczyłoby na $2\cdot 10^{13}$ s $\approx$ 600 tysięcy lat.

Zadania z matematyki nr 501, 502

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2005

501. Dane są dwa współśrodkowe okręgi o promieniach R, r $(R > r)$. Wypukły czworokąt $ABCD$ jest wpisany w mniejszy okrąg, a półproste $AB^{\rightarrow}$, $BC^{\rightarrow}$, $CD^{\rightarrow}$, $DA^{\rightarrow}$ przecinają większy okrąg odpowiednio w punktach C_1, D_1, A_1, B_1; przy tym stosunek obwodów czworokątów $A_1B_1C_1D_1$ i $ABCD$ wynosi R/r. Obliczyć te obwody.

502. Wykazać, że dla prawie wszystkich liczb naturalnych n istnieje przedstawienie liczby 1 w postaci sumy odwrotności sześcianów n liczb naturalnych.

Zadanie 502 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
485 ($WT = 2{,}56$) i **486** ($WT = 1{,}24$)
z numeru 9/2004

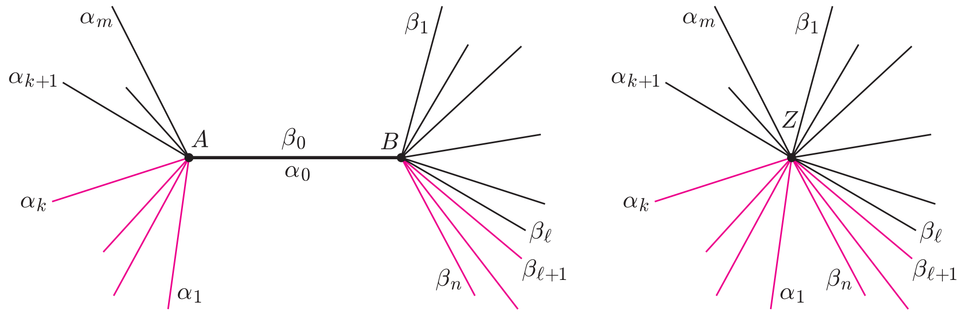
Witold Bednarek	– Łódź	43,23
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	40,39
Jerzy Witkowski	– Radlin	39,38
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	35,75
Tomasz Warszawski	– Kraków	33,13

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2005

Przypominamy treść zadań:

493. Każda krawędź wielościanu wypukłego (o wszystkich kątach dwuściennych mniejszych od 180°) została pomalowana jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje wierzchołek A oraz płaszczyzna, przechodząca przez A i niezawierająca innych wierzchołków wielościanu, o tej własności, że po każdej jej stronie wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka A mają jednakowy kolor.

494. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \dfrac{\sqrt{13}-1}{6\sqrt{13}}\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n$.
Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \lfloor a_n \rfloor)$.



493. Szkielet wielościanu można traktować jako graf na płaszczyźnie (przez rzutowanie z punktu położonego na zewnątrz wielościanu, blisko dowolnie wybranej ściany, na płaszczyznę równoległą do tej ściany – „zaglądanie do wnętrza wielościanu przez przezroczystą ścianę"). Na ten graf przenosimy zadane pokolorowanie krawędzi. Wierzchołek grafu nazwiemy *małopstrokatym*, jeśli obchodząc wszystkie wybiegające z niego krawędzie (w ustalonym kierunku obiegu – na przykład zgodnie z ruchem wskazówek zegara) napotkamy co najwyżej dwie zmiany koloru. Takiemu wierzchołkowi grafu odpowiada wierzchołek wielościanu o wymaganej w zadaniu własności; wynika to z założenia, że żadne dwie ściany nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wystarczy więc dowieść, że każdy graf płaski o 2-pokolorowanych krawędziach ma wierzchołek małopstrokaty.

Wykażemy to przez indukcję względem liczby krawędzi. Gdy graf ma tylko jedną krawędź, nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla każdego grafu płaskiego mającego q krawędzi i weźmy pod uwagę graf płaski G mający $q+1$ krawędzi, pomalowanych dwoma kolorami. Wybierzmy dowolną krawędź AB. Numerujemy krawędzie wychodzące z wierzchołka A oraz krawędzie wychodzące z B kolejno (w ustalonym kierunku obiegu) $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ oraz $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, oznaczając przez α_0 oraz β_0 tę samą krawędź AB.

Usuwamy krawędź AB i łączymy wierzchołki A, B w jeden wierzchołek Z; w powstałym q-krawędziowym grafie istnieje wierzchołek małopstrokaty (założenie indukcyjne). Jeśli jest to wierzchołek różny od Z, to jest on także wierzchołkiem małopstrokatym w grafie G i mamy tezę indukcyjną. Mamy ją także wtedy, gdy wszystkie krawędzie α_i lub wszystkie krawędzie β_j są jednego koloru, gdyż wówczas (odpowiednio) A lub B jest wierzchołkiem małopstrokatym grafu G.

Pozostaje do rozpatrzenia sytuacja, gdy w ciągu krawędzi $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ otaczających małopstrokaty wierzchołek Z mamy dwie zmiany koloru, usytuowane wewnątrz bloków (α_i) oraz (β_j). Niech na przykład krawędzie $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_\ell$ będą czarne, a krawędzie $\beta_{\ell+1}, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – kolorowe $(0 < k < m,\ 0 < \ell < n)$. Niezależnie od koloru krawędzi AB $(= \alpha_0 = \beta_0)$, zarówno A, jak i B, jest wierzchołkiem małopstrokatym w grafie G. To kończy indukcyjne uzasadnienie dowodzonej tezy.

494. Przyjmijmy

$\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\quad \beta = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ $\quad$ (więc $\alpha + \beta = 3,\ \alpha\beta = -1$),

$A = \frac{\sqrt{13}-1}{6\sqrt{13}}$, $\quad B = \frac{\sqrt{13}+1}{6\sqrt{13}}$ $\quad$ (więc $a_n = A \cdot \alpha^n$),

$s_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ $\quad$ (więc $s_0 = \frac{1}{3}$, $s_1 = \frac{1}{3}$).

Z przekształcenia
$$\alpha^n = -\beta\alpha^{n+1} = (\alpha - 3)\alpha^{n+1} = \alpha^{n+2} - 3\alpha^{n+1}$$
mamy $\alpha^{n+2} = 3\alpha^{n+1} + \alpha^n$; podobnie $\beta^{n+2} = 3\beta^{n+1} + \beta^n$, i w konsekwencji $s_{n+2} = 3s_{n+1} + s_n$. Stąd przez łatwą indukcję wynika, że $s_n - \frac{1}{3}$ jest dla każdego n liczbą całkowitą. Ponieważ zaś $|\beta| < 1$ oraz
$$a_n = A \cdot \alpha^n = s_n - B \cdot \beta^n = \left(s_n - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - B \cdot \beta^n\right),$$
to (dla dużych n) $\lfloor a_n \rfloor = s_n - \frac{1}{3}$, więc ostatecznie $a_n - \lfloor a_n \rfloor = \frac{1}{3} - B \cdot \beta^n \to \frac{1}{3}$.