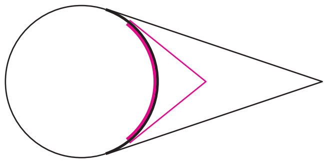
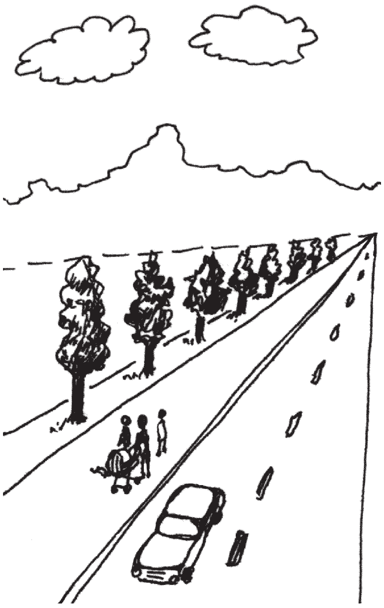
I co widzimy?

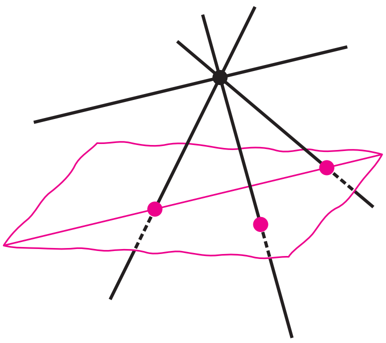
Marek KORDOS



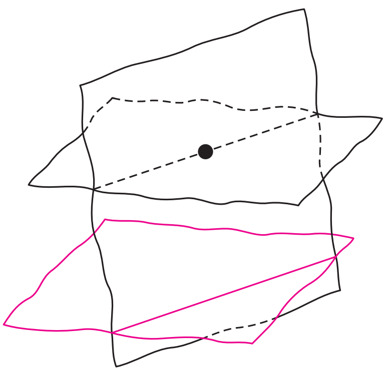
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Marek Kordos, Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Będzie to opowiastka z morałem, który można zdradzić już na początku: *ulepszanie codzienności może prowadzić do zdumiewająco absurdalnych, egzotycznych światów.*

Pierwsze bodaj odnotowanie paradoksu związanego z widzeniem zawiera euklidesowe (ponoć) dzieło *Optyka*. Oto on: *gdy zbliżamy się do kuli, wydaje się nam ona coraz większa, choć widzimy coraz mniejszy jej fragment* – istotnie, wystarczy spojrzeć na rysunek obok.

Fakt, że przedmioty oddalone widzimy pod mniejszym kątem niż ich znajdujące się bliżej nas egzemplarze, prowadzi nas do wniosku, że równoległe brzegi drogi – gdyby tylko można było je oglądać dowolnie daleko – spotkałyby się „w końcu". Ów koniec nazywa się tradycyjnie nieskończonością. Matematycy, ludzie zawodowo konkretni, znaleźli dla tego końca prostej nazwę: jest to *kierunek*, bo przecież to wspólny kierunek mają równoległe proste. Słowo się rzekło i pojawiła się pierwsza absurdalna własność prostej: przecież prosta ma ten sam kierunek, niezależnie z której jej strony będziemy go szukać: dołączenie kierunków w sposób konieczny czyni z prostych linie zamknięte jak okrąg.

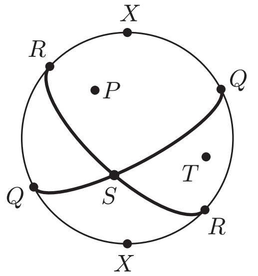
Ale przecież to samo dołączenie kierunków pozwala wprowadzić perspektywę zbieżną, czego początek znaleźć można w *Małej Delcie* na stronie 15.
Tu spróbujmy zobaczyć, jakie jeszcze własności ma płaszczyzna, na której proste zostały uzupełnione kierunkami. Jeżeli umówić się jeszcze, że linia złożona z samych kierunków to też prosta (a jakże, także zamknięta, jak wszystkie), to otrzymany obiekt nazywa się *płaszczyzną rzutową*.

Matematyk, oglądając jakiś obiekt, stara się zobaczyć go z wielu stron. W tym celu poszukuje obiektów z nim *izomorficznych*, czyli tak samo zbudowanych. Postąpmy w ten sposób.

Nad płaszczyzną rzutową wybierzmy jakiś punkt, nazwijmy go środkiem. Za jego pomocą zbudujemy obiekt izomorficzny z płaszczyzną rzutową, który nazywa się jej *modelem środkowym*. Będzie on składał się z nowych „punktów" i nowych „prostych". Nowy punkt powstaje ze starego tak: jest to prosta (w przestrzeni) przechodząca przez stary punkt i środek. Nietrudno zauważyć, że w ten sposób otrzymujemy wszystkie proste przechodzące przez środek: proste równoległe do wyjściowej płaszczyzny przechodzą przez kierunki jej prostych (rys. 3). Nowe proste to płaszczyzny przechodzące przez stare proste i środek. I znów są to wszystkie płaszczyzny, bo ta równoległa do wyjściowej przechodzi przez prostą złożoną z kierunków. Nowy punkt leży na nowej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu stary leży na odpowiadającej mu prostej. Co tu widać? Widać, że na płaszczyźnie rzutowej wszystkie „punkty" (i wszystkie „proste") są równouprawnione – nie sposób poznać, który był poprzednio kierunkiem.

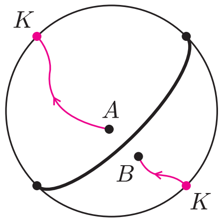
Z modelu środkowego zrobimy teraz *model analityczny*. Jeśli w przestrzeni wprowadzimy układ współrzędnych o początku w środku, to każda przestrzenna prosta będzie złożona z punktów, których współrzędne będą proporcjonalne: $\{(at, bt, ct)\}$, gdzie a, b, c są dowolnie ustalonymi liczbami (byle nie same zera), a t jest dowolnie zmieniającym się parametrem. Widać więc, że każdy „punkt" modelu środkowego jest opisany przez trójkę liczb $[a, b, c]$ daną z dokładnością do proporcjonalności. Podobnie „proste": każda z nich jest opisana równaniem $px_1 + qx_2 + rx_3 = 0$, przy czym dla proporcjonalnych trójek p, q, r otrzymuje się tę samą „prostą". Zatem i one dane są przez trójki $[p, q, r]$. A „punkt" leży na „prostej", gdy $ap + bq + cr = 0$. Widać więc, że gdyby ktoś pozamieniał wszystkie „punkty" na „proste" i odwrotnie, to nie dałoby się tego odkryć. To spostrzeżenie można wyrazić tak: *jeżeli w dowolnym twierdzeniu o płaszczyźnie rzutowej zamienimy punkty na proste i odwrotnie, to pozostanie ono prawdziwe* – nazywa się to *dualnością*. To już jest egzotyczne, ale jeszcze nie przeraża.

Następny model, *na sferze*, będzie tylko pomocniczy. Mianowicie przetnijmy model środkowy ze sferą o środku w środku (gdzieżby indziej). Teraz „punkty" staną się parami punktów antypodycznych (czyli leżących na końcach jednej średnicy), a „proste” – okręgami wielkimi tej sfery (czyli mającymi środek w środku sfery).



Rys. 5

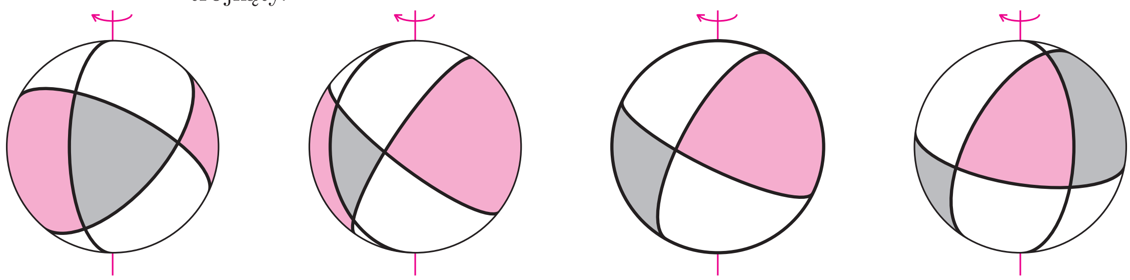
Jeśli jednak odpowiednio do rozstawu źrenic dobierzemy promień sfery, to może się zdarzyć, że zobaczymy dokładnie jej połowę. To, co będzie widać, nazywa się *modelem na półsferze*. Nowe punkty są tu punktami, z wyjątkiem tych, które leżą na brzegu półsfery – te mają na nim antypodycznego brata-bliźniaka (rys. 5). Nowe proste to półokręgi wielkie mające jednak utożsamione końce: przecież są one antypodyczne, a więc reprezentują ten sam punkt.



Rys. 6

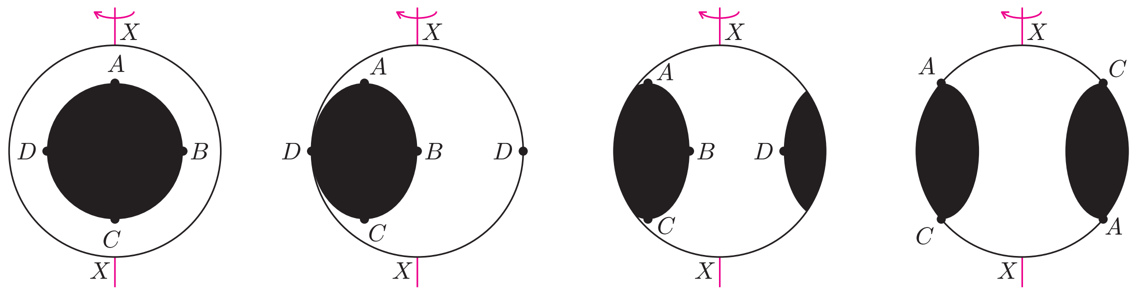
Zauważmy tu bardzo już egzotyczną osobliwość: prosta nie rozcina płaszczyzny – cała leży po jednej jej stronie, co oznacza, że od dowolnego punktu do dowolnego innego można dojść, nie przecinając prostej (rys. 6).

Model na półsferze ma wielką zaletę – jest ruchomy, co pozwala oglądać narysowane w nim figury z różnych stron. Możemy mianowicie przez parę leżących na jego „brzegu” (nie jest to, oczywiście, żaden brzeg – prawda?) antypodycznych punktów poprowadzić (w przestrzeni) oś i obracać sferę względem tej osi. Pewne punkty będą przy tym obrocie ginęły z oczu, ale równocześnie będą się pojawiali ich bliźniaczy bracia, słowem – stale będzie wszystko widać, choć coraz to inaczej. Na rysunku 7 widzimy ilustrację korzyści, jakie z takiego obracania można wynieść: np. jak pokazać, że dowolne trzy nieprzecinające się w jednym punkcie proste dzielą płaszczyznę na cztery trójkąty.



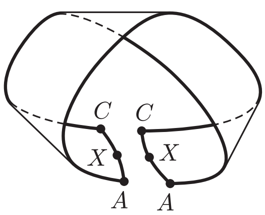
Rys. 7. Widać, że tak obszar szary, jak kolorowy jest trójkątem; wtykając gdzie indziej oś, można to pokazać dla pozostałych obszarów.

A teraz zobaczmy, co zostanie z płaszczyzny rzutowej, gdy wytniemy w niej okrągłą dziurę.



Rys. 8

I tu największe zaskoczenie: jeśli bowiem skleimy pozostałych jeszcze antypodycznych braci-bliźniaków (rys. 9), okaże się, że jest to wstęga Möbiusa! Płaszczyzna rzutowa jest to wstęga Möbiusa, do której brzegu przyklejono koło o takim samym obwodzie. Zatem *płaszczyzna rzutowa dziedziczy egzotyczne cechy wstęgi Möbiusa: jest jednostronna i nieorientowalna*! A o wstędze można poczytać w *Kalejdoskopie Matematycznym* Hugona Steinhausa, albo i w *Delcie* 9/2002 (s. 11).



Rys. 9

Czy tak powinna wyglądać płaszczyzna, jaką posługują się malarze stosujący perspektywę zbieżną? Z całą pewnością nikt się tego nie spodziewał, że dokonując pozornie błahego kroku – wyposażając prostą w dodatkowy punkt, mianowicie jej kierunek, otrzymamy aż tak bardzo egzotyczny, zagadkowy obiekt.

Przestrzenie rzutowe, w tym płaszczyzna, mają oczywiście szereg zalet (patrz np. *Delta* z 2003 r.: nr 3 (s.8), nr 8 (s.v), nr 12 (s.vii)), tak że obecnie są głównym rodzajem geometrii uprawianej przez zawodowych matematyków, ale to już zupełnie inna historia.