Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2005

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 396, 397

Redaguje Jerzy B. BROJAN

396. Cylinder, do którego stałym strumieniem wlewa się woda, pełni funkcję zegara wodnego – na bocznej ściance naklejono pionowo skalę minutową. Czy jakieś inne przezroczyste naczynie o kształcie bryły obrotowej z pionową osią symetrii, po naklejeniu na nie tej samej skali, może pełnić rolę zegara? Skala powinna być umieszczona w jednej płaszczyźnie z osią symetrii. Grubość ścianki należy pominąć. Jeśli jest to możliwe, to narysować przekrój naczynia, na podstawie odpowiednich obliczeń numerycznych.

397. Rozważmy dwuwymiarowy model „atomu” składającego się z n „elektronów” odpychających się wzajemnie siłą Coulomba ($F = 1/r^2$), na które dodatkowo działa przyciągająca siła centralna ze strony nieruchomego „jądra”; siła ta powinna umożliwiać utrzymanie „elektronów” w stanie równowagi (propozycja: niech ta siła będzie postaci $F = r^\beta$, gdzie $\beta > 0$). Zadanie polega na numerycznym zbadaniu tych stanów równowagi, w zależności od liczby n (równej kilka – kilkanaście, maksymalnie około 50) oraz parametrów opisujących siłę centralną (w powyższym przykładzie β). Proponujemy przyjęcie przypadkowego rozmieszczenia „elektronów” w chwili początkowej i stopniowego dochodzenia do stanu równowagi (np. niech „elektrony” przemieszczają się w kierunku działania siły wypadkowej, jakby znajdowały się w ośrodku lepkim...). Rozwiązujący powinni zwrócić uwagę na następujące kwestie:

a) czy dla ustalonego n i ustalonej siły centralnej istnieje jeden, dwa, czy więcej stanów równowagi?

b) jak kształt i symetria otrzymanych wyników zależą od n i parametrów siły centralnej?

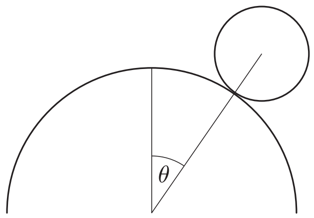
Nadesłane rozwiązania powinny zawierać dane dotyczące siły centralnej, opis algorytmu obliczeniowego i wydruk lub szkic wyniku, tzn. otrzymane rozmieszczenie równowagowe. Liczba rozpatrzonych przypadków nie powinna przekraczać około 20. Ciekawe rozwiązania opublikujemy.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2004

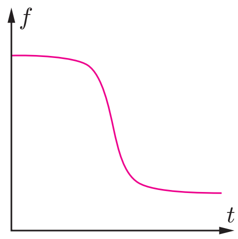
Przypominamy treść zadań:

388. Jednorodną kulę położono w najwyższym punkcie nieruchomej półkuli, nadając jej bardzo małą prędkość początkową. Współczynnik tarcia kinetycznego (poślizgowego) wynosi 0,3, natomiast podczas toczenia się bez poślizgu nie ma strat energii. W jakim punkcie kula zacznie się ślizgać po półkuli? Należy podać wartość kąta θ (zob. rys. 1).

389. Źródło wysyłające dźwięk o stałej częstotliwości porusza się po linii prostej, mijając nieruchomy odbiornik położony w pewnej odległości od tej prostej. Dany jest wykres częstotliwości odbieranego dźwięku w zależności od czasu (rys. 2). Jak na podstawie tego wykresu można wyznaczyć chwilę, w której nastąpiło największe zbliżenie źródła do odbiornika? Należy podać niezbędne wzory.



Rys. 1



Rys. 2

388. Oznaczmy promień łuku, po którym porusza się środek kuli (tzn. sumę promieni półkuli i kuli) przez R. Prędkość środka kuli w punkcie odpowiadającym kątowi θ wyznaczymy z zasady zachowania energii $mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. Po podstawieniu momentu bezwładności $I = \frac{2}{5}mr^2$ oraz prędkości kątowej w postaci $\omega = v/r$ otrzymujemy $v^2 = \frac{10}{7}gR(1-\cos\theta)$. Siłę nacisku kuli na półkulę N znajdziemy z II zasady dynamiki, tzn. $N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} = mg(\frac{17}{7}\cos\theta - \frac{10}{7})$. Siłę tarcia T wyznaczymy z układu równań wiążących przyspieszenie liniowe a i kątowe ε kuli

$$\begin{cases} Tr = I\varepsilon = \frac{2}{5}mra, \\ mg\sin\theta - T = ma. \end{cases}$$

Stąd $T = \frac{2}{7}mg\sin\theta$. Przyrównujemy iloraz T/N do danego współczynnika tarcia, a wartość kąta θ okazuje się równa $\theta = 35{,}4^\circ$.

389. Dźwięk odebrany w chwili największego zbliżenia źródła musiał zostać wysłany wcześniej – w chwili, gdy kąt między prostą a kierunkiem do odbiornika spełniał warunek $\cos\alpha = v/c$ (gdzie v – prędkość źródła, c – prędkość dźwięku). Składowa prędkości źródła wzdłuż kierunku do odbiornika wynosiła wtedy $v' = v\cos\alpha = v^2/c$. Tę składową należy podstawić do wzoru opisującego zjawisko Dopplera dla zbliżającego się źródła $f' = f_0\frac{c}{c-v'} = f_0\frac{c^2}{c^2-v^2}$, gdzie f_0 – częstotliwość dźwięku wysyłanego. Należy jeszcze wyrazić f_0 i v przez łatwe do odczytania z wykresu częstotliwości asymptotyczne f_1 (początkowa) i f_2 (końcowa). Ze wzorów $f_1 = f_0\frac{c}{c-v}$, $f_2 = f_0\frac{c}{c+v}$ wyznaczamy $f_0 = \frac{2f_1f_2}{f_1+f_2}$, $v = c\frac{f_1-f_2}{f_1+f_2}$ i ostatecznie $f' = \frac{f_1+f_2}{2}$. W chwili największego zbliżenia źródła częstotliwość odbieranego dźwięku była równa średniej arytmetycznej częstotliwości początkowej i końcowej.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2005

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
386 ($WT = 1{,}90$) i **387** ($WT = 3{,}51$)
z numeru 11/2004

Jerzy Witkowski	– Radlin	26,45
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	24,04
Konrad Kapcia	– Częstochowa	15,05
Mateusz Łącki	– Kraków	11,53

Zadania z matematyki nr 499, 500

Redaguje Marcin E. KUCZMA

499. Dla ustalonej liczby naturalnej n rozważamy ciągi $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ spełniające warunki $a_0 = 0$ oraz $|a_k| = |1 + a_{k-1}|$ dla $k = 1, \ldots, n$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość sumy $a_1 + \ldots + a_n$.

500. Znaleźć taką liczbę naturalną n, że w każdym zbiorze n punktów kratowych na płaszczyźnie istnieje pięć punktów, których środek ciężkości jest punktem kratowym. Im mniejsza liczba n, tym lepszy wynik i wyższa ocena.

(Na płaszczyźnie kartezjańskiej: punkt kratowy – to punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi; środek ciężkości piątki punktów – to punkt, którego pierwsza współrzędna jest średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych tych pięciu punktów, i tak samo dla drugich współrzędnych).

Zadanie 500 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2004

Przypominamy treść zadań:

491. Wyznaczyć wszystkie wyrazy ciągu $a_n = n^2 + 44n + 99$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), które są kwadratami liczb całkowitych.

492. Liczby dodatnie a, b, c, α, β, γ spełniają warunki:

$$a + b + c = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 > \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3.$$

Czy z tych założeń wynika, że $a^n + b^n + c^n > \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ dla każdej liczby naturalnej $n > 3$?

491. Z nierówności $(n+9)^2 < a_n < (n+22)^2$ wynika, że jeśli a_n jest kwadratem liczby całkowitej $m > 0$, to $n + 9 < m < n + 22$; ponadto n i m są różnej parzystości, więc $m = n + k$, $k \in \{11, 13, 15, 17, 19, 21\}$. Z równania $a_n = (n+k)^2$ obliczamy

$$n = \frac{k^2 - 99}{44 - 2k}.$$

Dla $k = 13$ i 19 ten ułamek nie przedstawia liczby całkowitej. Dla pozostałych czterech wartości k dostajemy liczby $n = 1, 9, 19, 171$, wyznaczające szukane wyrazy a_n, równe kolejno 12^2, 24^2, 36^2, 192^2.

492. Odpowiedź: *Tak* (i to dla każdego wykładnika większego od 3, niekoniecznie naturalnego).

Dowód: przypuśćmy, że tak nie jest; wówczas funkcja

$$F(x) = a^x + b^x + c^x - \alpha^x - \beta^x - \gamma^x$$

przyjmuje gdzieś w przedziale $(3; \infty)$ wartość 0. Przyjmijmy, że $a \geqslant b \geqslant c$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Z podanych założeń wynika, że wielomiany $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ oraz $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ różnią się o stałą:

$$Q(x) - P(x) = abc - \alpha\beta\gamma > 0;$$

ostatnia nierówność jest konsekwencją tożsamości

$$abc = \tfrac{a^3+b^3+c^3}{3} + \tfrac{a+b+c}{6}\big((a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2)\big).$$

Szkicując wykresy tych wielomianów, wnioskujemy o uporządkowaniu ich pierwiastków: $a > \alpha \geqslant \beta > b \geqslant c > \gamma$. Zatem $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$. Wiemy też, że $F(3) > 0$.

W zbiorze $\{x > 3\colon\ F(x) = 0\}$ istnieje liczba najmniejsza u oraz liczba największa w; przy tym albo $u < w$, albo $u = w$, i wtedy $F(x) > 0$ dla $x \in (3; u) \cup (u; \infty)$.

Niech $(a_1, \ldots, a_6)$ będzie dowolną permutacją ciągu $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$, w której $a_5 = b$, $a_6 = c$; tak więc

$$F(x) = \sum_{i=1}^{6} \varepsilon_i a_i^x\,; \qquad \varepsilon_i = \pm 1\,; \qquad \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1.$$

Określamy indukcyjnie funkcje $f_1, \ldots, f_5$:

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{a_1}\right)^x F(x), \qquad f_{k+1}(x) = \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^x f_k'(x),$$

$k = 1, 2, 3, 4$. Gdy $u < w$, wówczas $f_1(x) = 0$ dla $x = 0, 1, 2, u, w$, i wobec tego funkcja f_1' ma $\geqslant 4$ miejsca zerowe. Gdy zaś $u = w$, czyli $f_1 > 0$ w przedziałach $(3; u)$ i $(u; \infty)$, to $f_1'(u) = 0$; ponadto $f_1(x) = 0$ dla $x = 0, 1, 2, u$, więc f_1' ma $\geqslant 3$ miejsca zerowe, różne od u. W każdym przypadku funkcja f_1' (więc także funkcja f_2) ma $\geqslant 4$ miejsca zerowe. Zatem f_2' ma $\geqslant 3$ miejsca zerowe. Kontynuując to rozumowanie, stwierdzamy, że f_5 ma $\geqslant 1$ miejsce zerowe.

Funkcje f_k można wyrazić wzorem efektywnym, łatwym do uzasadnienia przez indukcję:

$$f_k(x) = \varepsilon_k \lambda_{kk} + \sum_{i=k+1}^{6} \varepsilon_i \lambda_{ik} \left(\frac{a_i}{a_k}\right)^x, \text{ gdzie } \lambda_{ik} = \prod_{j=1}^{k-1} \ln \frac{a_i}{a_j}$$

(dla $k = 1$ przyjmujemy $\lambda_{i1} = 1$). Dla $k = 5$ otrzymujemy

$$f_5(x) = \varepsilon_5 \lambda_{55} + \varepsilon_6 \lambda_{65} \left(\frac{c}{b}\right)^x.$$

Ale

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1,$$
$$\lambda_{55} = \ln\tfrac{b}{a}\ln\tfrac{b}{\alpha}\ln\tfrac{b}{\beta}\ln\tfrac{b}{\gamma} < 0,$$
$$\lambda_{65} = \ln\tfrac{c}{a}\ln\tfrac{c}{\alpha}\ln\tfrac{c}{\beta}\ln\tfrac{c}{\gamma} < 0,$$

więc $f_5(x) < 0$ dla wszystkich x – wbrew wcześniejszemu stwierdzeniu, że ta funkcja ma miejsce zerowe. Sprzeczność kończy dowód.