Obserwujemy zbieżność szeregów potęgowych, czyli *Mathematica* w akcji

Przemysław KAJETANOWICZ

Znany program do obliczeń symbolicznych i numerycznych *Mathematica* firmy Wolfram jest szalenie wdzięcznym narzędziem do eksperymentowania z rozmaitymi pojęciami matematycznymi. Spróbujemy to zademonstrować tutaj na przykładzie szeregów potęgowych.

Szeregi potęgowe są ważnym pojęciem analizy matematycznej. Pozwalają znajdować przybliżone wartości funkcji za pomocą wielomianów. Zwróćmy uwagę na to, że z obliczeniowego punktu widzenia wielomiany są funkcjami „łatwymi" w obsłudze – do znajdowania ich wartości wystarczą cztery operacje arytmetyczne, w odróżnieniu od takich „trudniejszych obliczeniowo" obiektów, jak funkcje trygonometryczne, wykładnicze czy logarytmiczne.

Szeregiem potęgowym rzeczywistym nazywamy wyrażenie postaci

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots\ ,$$

gdzie c_k, x_0 oraz x są liczbami rzeczywistymi. Liczba x_0 nazywa się *środkiem* szeregu, liczby c_k – jego współczynnikami. Dla każdego całkowitego $n \geqslant 0$ wyrażenie

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x - x_0)^k$$

nazywa się *n-tą sumą częściową szeregu potęgowego.* Zauważmy, że przy ustalonych współczynnikach i środku szeregu potęgowego każda jego suma częściowa jest wielomianem zmiennej x. Jeżeli istnieje skończona granica

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

to mówimy, że szereg potęgowy *jest zbieżny w punkcie x*, a $S(x)$ nazywamy jego *sumą*. Zauważmy ponadto, że dla danego szeregu potęgowego (tzn. przy danych współczynnikach i środku) jego suma jest funkcją zmiennej x.

Natychmiast widać, że każdy szereg potęgowy jest zbieżny w punkcie x_0 i że jego suma wynosi wtedy c_0. Można udowodnić, że zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg potęgowy jest zbieżny, jest albo zbiorem jednopunktowym, albo całą prostą, albo pewnym przedziałem o środku w x_0. Przedział ten nazywa się *przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego. Przedział zbieżności może być otwarty, domknięty lub jednostronnie domknięty – zależy to od konkretnego szeregu.

Ze szczególnymi przypadkami szeregów potęgowych spotykamy się już w szkole. Popatrzmy, na przykład, na szereg geometryczny

$$1 + x + \ldots + x^n + \ldots$$

Pamiętamy, że szereg taki jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego iloraz spełnia warunek $|x| < 1$. Przedziałem zbieżności szeregu jest więc w tym przypadku przedział $(-1, 1)$. Dla każdego $x \in (-1, 1)$ zachodzi równość

$$1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

wynikająca ze znanego wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Przepisując tę równość w postaci

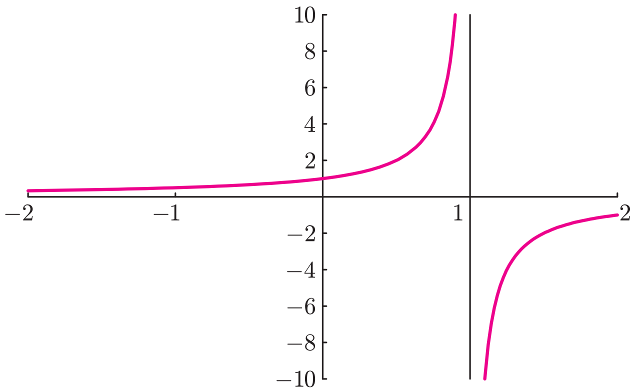
$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty}(1 + x + \ldots + x^n),$$

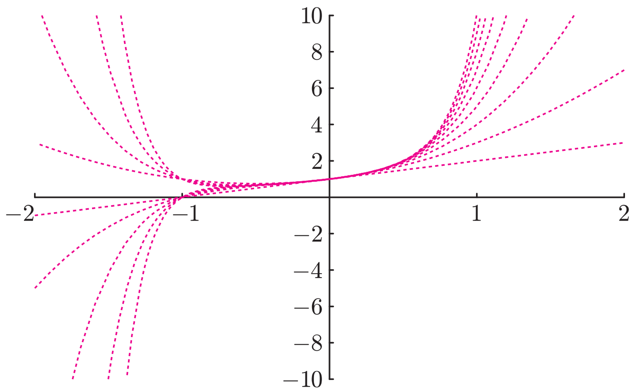
możemy ją następująco wysłowić w języku „funkcyjnym":

dla każdego $x \in (-1, 1)$ wartość funkcji $f(x)$ jest granicą ciągu wartości wielomianów

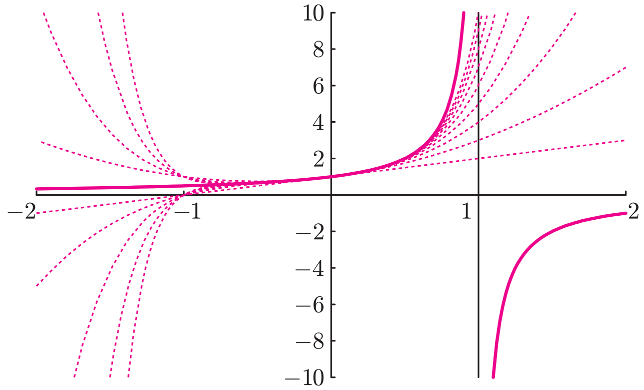
$$S_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}.$$

Efekt „zbliżania się" sum częściowych $S_n(x)$ do $f(x)$ dla różnych wartości $x \in (-1, 1)$ można zaobserwować na rysunkach wygenerowanych za pomocą pakietu *Mathematica*. Górny rysunek niżej przedstawia wykres funkcji f, dolny – wykresy sum częściowych S_n dla $n = 3, \ldots, 11$. Widać wyraźnie, jak „psuje się" zbieżność sum częściowych szeregu poza przedziałem zbieżności.





Zbieżność
$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty}(1+x+\ldots+x^n)$$
widać jeszcze lepiej, gdy wszystkie wykresy umieszczone są w jednym układzie współrzędnych.



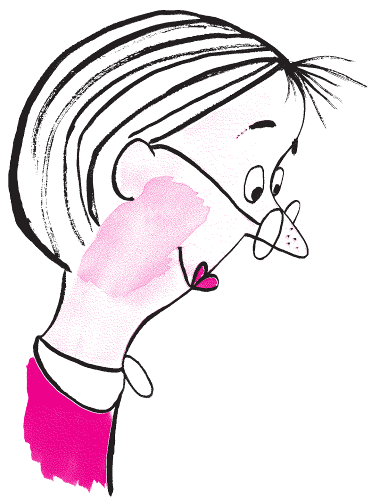
Wróćmy do ogólnego przypadku. Jak zauważyliśmy na samym początku, suma szeregu potęgowego jest pewną funkcją zmiennej x. Dziedziną tej funkcji jest, oczywiście, przedział zbieżności szeregu. Nasuwa się pytanie: kiedy daną funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej można przedstawić jako sumę pewnego szeregu potęgowego?

Odpowiedź na to pytanie zależy od własności funkcji związanych z jej różniczkowalnością i prowadzi do pojęcia szeregu Taylora. Załóżmy, że f jest funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0 i że ma w tym otoczeniu wszystkie pochodne. Szereg
$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$
nazywa się *szeregiem Taylora funkcji f w otoczeniu punktu x_0*. Suma częściowa $S_n(x)$ szeregu Taylora nazywa się *wielomianem Taylora rzędu n*, a jego współczynniki – *współczynnikami Taylora funkcji f w otoczeniu punktu x_0*.

W przypadku $x_0 = 0$ szereg Taylora przyjmuje postać
$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$
i nazywa się *szeregiem Maclaurina* funkcji f.

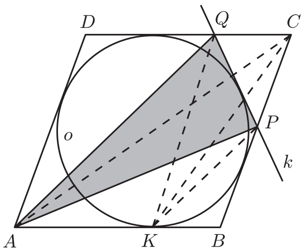
Z samej definicji widać, że szereg Taylora funkcji f jest zbieżny w punkcie x_0 i że jego suma jest wtedy równa $f(x_0)$. W ogólnym przypadku szereg Taylora nie musi być zbieżny do $f(x)$ dla wartości x różnych od x_0. Klasycznym przykładem jest funkcja
$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$
Można sprawdzić, że funkcja ta ma wszystkie pochodne w każdym punkcie i że wszystkie jej pochodne w zerze są równe zeru. Szereg Maclaurina rozważanej funkcji ma zatem postać
$$0 + 0x + \ldots + 0x^n + \ldots$$
i jego suma jest, oczywiście, równa 0 dla każdego x rzeczywistego. Natomiast sama funkcja przyjmuje wartość 0 tylko w zerze. Kiedy więc szereg Taylora jest zbieżny do „swojej” funkcji? Można udowodnić, że jednym z warunków dostatecznych takiej zbieżności jest wspólna ograniczoność pochodnych $f^{(n)}(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dokładniej, jeśli istnieją stała M i otoczenie $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktu x_0, takie że dla każdego n naturalnego i dla każdego $x \in U$ zachodzi nierówność $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$, wówczas
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$
dla każdego $x \in U$.

Ostatnią równość nazywamy *rozwinięciem Taylora funkcji f w otoczeniu punktu x_0*. Podobnie jak poprzednio, jeśli $x_0 = 0$, to mówimy o *rozwinięciu Maclaurina funkcji f*.



Można udowodnić, że rozwinięcie Taylora jest jedynym sposobem przedstawienia danej funkcji jako sumy szeregu potęgowego. Mówiąc ściśle, jeżeli w jakimkolwiek przedziale otwartym zawierającym x_0 zachodzi równość
$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots\ ,$$
to funkcja f ma wszystkie pochodne w tym przedziale oraz $f^{(n)}(x_0) = n!\,c_n$. Fakt ten pozwala znajdować rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy niekoniecznie przez obliczanie kolejnych pochodnych. Przypomnijmy rozważany wcześniej szereg geometryczny
$$1 + x + \ldots + x^n + \ldots$$
Jego sumą w przedziale $(-1,1)$ jest funkcja
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
– można to udowodnić elementarnie. Można też łatwo sprawdzić przez różniczkowanie, że omawiany szereg geometryczny jest właśnie szeregiem Maclaurina funkcji $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Wiele funkcji elementarnych daje się rozwinąć w szereg Taylora (częściej rozważamy rozwinięcia Maclaurina, ponieważ dają one wygodny „wzór na funkcję” w języku szeregu).

Rozwiązanie zadania M 1092.
Oznaczmy przez K punkt styczności okręgu o z bokiem AB.



W zadaniu 1089 z poprzedniej *Delty* wykazaliśmy, że proste KP i AQ są równoległe. Stąd, oznaczając przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ, otrzymujemy $[APQ] = [AKQ] = [AKC]$. Pole trójkąta AKC nie zależy od wyboru stycznej k, skąd teza.

Na przykład funkcja wykładnicza e^x oraz funkcje trygonometryczne $\sin x$ i $\cos x$ są na całej prostej sumami swoich szeregów Maclaurina:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ ,$$

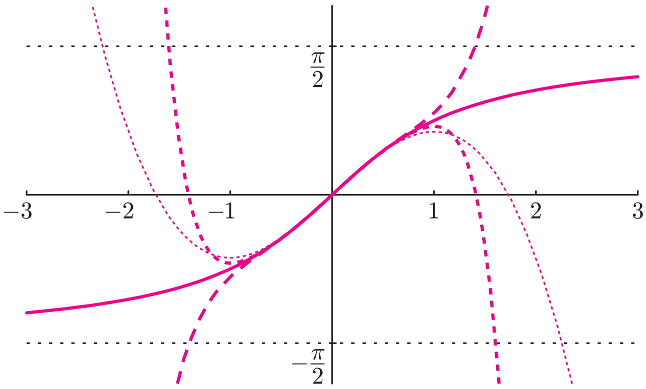
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

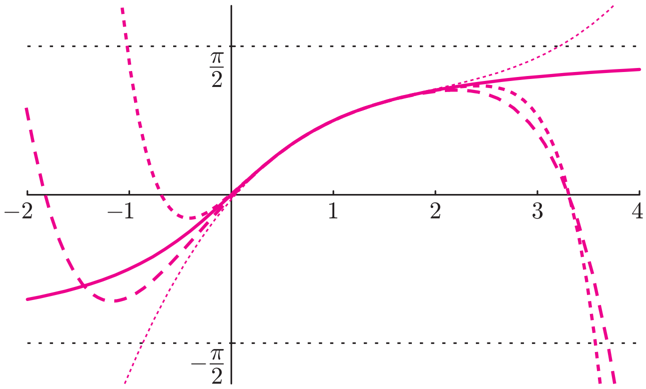
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots\ ,$$

Może się oczywiście zdarzyć, że szereg Taylora jest zbieżny tylko w pewnym przedziale ograniczonym. Na przykład szereg Maclaurina funkcji $y = \operatorname{arctg} x$ jest zbieżny tylko w przedziale $(-1, 1]$. Rozwinięcie Maclaurina tej funkcji ma postać

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

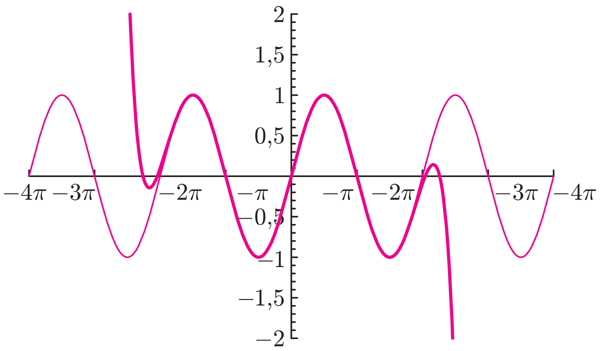
Zwróćmy uwagę, że sama funkcja $y = \operatorname{arctg} x$ jest określona na całej prostej, jednak jest sumą swojego szeregu Maclaurina tylko w przedziale $(-1, 1]$. Jeśli chcemy uzyskać przybliżenia tej funkcji wielomianami w otoczeniu innego punktu, musimy użyć odpowiedniego szeregu Taylora. Ilustrują to dwa rysunki niżej (wygenerowane przez *Mathematica*). Przedstawiono na nich wykres funkcji $y = \operatorname{arctg} x$. Dodatkowo pierwszy rysunek zawiera wykresy jej wielomianów Maclaurina, drugi – wielomianów Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = 1$. W obu przypadkach są to wielomiany stopnia 3, 5 i 7. Zaobserwujmy ponownie, jak dobrze funkcja $\operatorname{arctg} x$ jest przybliżana swoimi wielomianami Taylora w przedziale zbieżności odpowiedniego szeregu potęgowego (na rysunkach wykresy praktycznie się pokrywają) i jak wszystko się psuje poza przedziałem zbieżności.





Pakiet *Mathematica* zawiera specjalną funkcję `Series` pozwalającą znajdować wielomiany Taylora. Wpisanie w komórkę dokumentu *Mathematica* przykładowego wyrażenia `Normal[Series[Sin[x],x,x0,n]]` spowoduje, że *Mathematica* zwróci wyrażenie będące wielomianem Taylora rzędu n funkcji $\sin x$ w otoczeniu punktu x_0. Oczywiście, w konkretnym wywołaniu w miejsce parametrów `x0,n` należy wstawić wartości liczbowe.

Spektakularne efekty można uzyskać, rysując wielomiany Maclaurina funkcji sinus i cosinus w „dużych" przedziałach o środku w zerze, pod warunkiem, że wielomiany te są dostatecznie wysokiego stopnia (przypomnijmy, iż obie funkcje są sumami swoich szeregów Maclaurina na całej prostej). Wpisanie następującego kodu do komórki dokumentu *Mathematica* wygeneruje obrazek demonstrujący, w jaki sposób funkcja $\sin x$ jest przybliżana przez swój wielomian Maclaurina stopnia 15 w przedziale $[-2\pi, 2\pi]$:




```
mojMaclaurin=Normal[Series[Sin[x],x,0,15]];
Plot[Sin[x],mojMaclaurin,x,-4Pi,4Pi,
PlotStyle -> Thickness[0.004],Thickness[0.008],
PlotRange -> -4Pi,4Pi,-2,2,
Ticks -> Range[-4Pi,4Pi,Pi],Automatic]
```