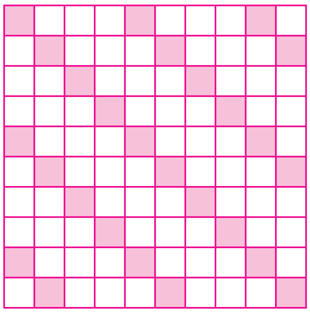
Niezmienniki w geometrii

Marcin PITERA

Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2004 roku.

Niezmiennikiem, zwanym też inwariantem, nazywa się pewną wielkość, niezmieniającą się przy dokonywaniu pewnych przekształceń na danym obiekcie. Aby zobrazować tę definicję i pokazać, na czym polega wykorzystywanie niezmienników w praktyce, posłużę się pewnym przykładem.

Zadanie 1. Dana jest szachownica o wymiarach 10×10. Udowodnić, że nie można jej wypełnić płytkami o wymiarach 1×4.



Rys. 1

Rozwiązanie. Pokolorujmy pola szachownicy tak, jak na rysunku 1. Łatwo zauważyć, iż każda płytka o wymiarach 1×4 zajmie dokładnie jedno pokolorowane pole. Czarnych pól powinno więc być 25 i ta liczba jest niezmiennikiem każdego pokrycia. Jest ich jednak 26, co daje sprzeczność – płytkami tymi nie można wypełnić szachownicy.

Uogólniając problem zawarty w tym zadaniu, dochodzimy do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Załóżmy, że $m \leqslant n_1$ oraz $m \leqslant n_2$. Wówczas (pokratkowany) prostokąt o wymiarach $n_1 \times n_2$ można wypełnić płytkami o wymiarach $1 \times m$ wtedy i tylko wtedy, gdy m jest dzielnikiem liczby n_1 lub dzielnikiem liczby n_2.

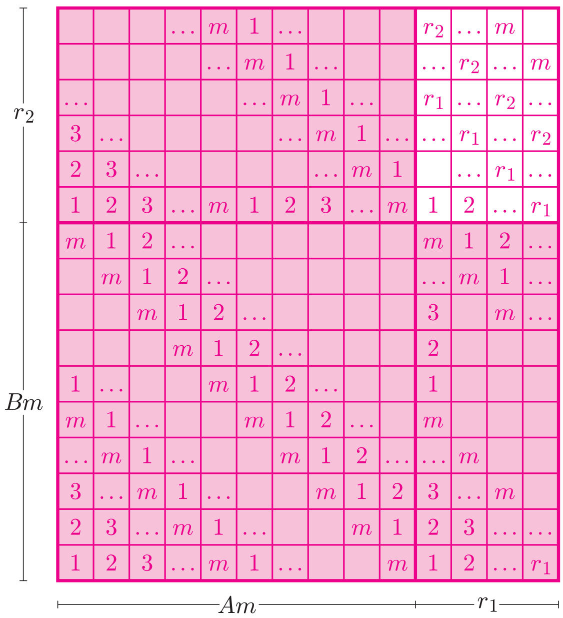
Dowód.

$\Longleftarrow$ Implikacja jest oczywista.

$\Longrightarrow$ Niech r_1 oraz r_2 będą resztami z dzielenia n_1 i n_2 przez m:

$$n_1 = A \cdot m + r_1, \quad n_2 = B \cdot m + r_2.$$

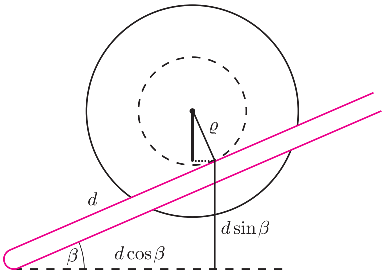
Podzielmy prostokąt $n_1 \times n_2$ na cztery mniejsze prostokąty o wymiarach $Am \times Bm$, $Am \times r_2$, $Bm \times r_1$ oraz $r_1 \times r_2$. Następnie ponumerujmy pola prostokątnej szachownicy w sposób podany na rysunku 2.



Rys. 2

Zauważmy, iż każda płytka o wymiarach $1 \times m$ będzie zajmowała dokładnie jedno pole z ustalonym numerem. W szarych prostokątach każdy z numerów występuje na tej samej liczbie pól, gdyż przynajmniej jeden z boków jest podzielny przez m. A zatem – jeśli prostokąt można pokryć płytkami o wymiarach $1 \times m$ – w czwartym prostokącie o wymiarach $r_1 \times r_2$ musi być po tyle samo pól oznaczonych tym samym numerem. Zauważmy jednak, że jeśli r_1 lub r_2 są różne od zera, to pól oznaczonych numerem r_1 lub numerem r_2 jest w nim więcej niż pól oznaczonych liczbą m. A zatem r_1 oraz r_2 muszą być równe zeru.

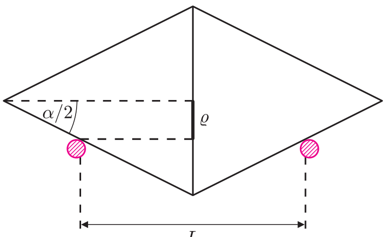
Rozwiązanie zadania F 639.
Jest to możliwe tylko wtedy, gdy przetoczenie klocka w prawo powoduje w obniżenie jego środka ciężkości.
Z rysunku 1 widać, że wysokość środka ciężkości jest równa $h = d \sin\beta + \rho\cos\beta$, gdzie d oznacza odległość punktu styku klocka z szynami od początku szyn zrzutowaną na płaszczyznę rysunku.



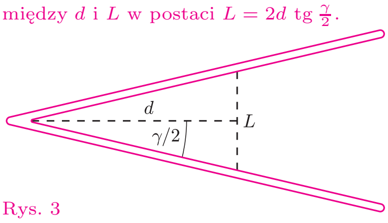
Rys. 1
Z drugiej strony z rysunku 2 widzimy, że

$$\rho = R - \frac{L}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},$$

gdzie R to promień wspólnej podstawy stożków, a L to odległość między szynami w punkcie styku z klockiem.



Rys. 2
Wreszcie z rysunku 3 dostajemy zależność między d i L w postaci $L = 2d\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}$.



Rys. 3
Podstawiając te zależności do wzoru na h dostajemy

$$h = R\cos\beta + d\left(-\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\cos\beta + \sin\beta\right)$$

Aby staczanie następowało samorzutnie, wyraz przy d musi być ujemny, czyli

$$\mathrm{tg}\,\beta < \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}.$$

Uogólniając poruszony w zadaniu problem i korzystając z tego, iż prostokąt $m_1 \times m_2$ można potraktować jako m_2 złączonych płytek $1 \times m_1$ oraz jako m_1 złączonych płytek $1 \times m_2$, a także z tego, iż płytki przy ścianach muszą do siebie przylegać, dochodzimy do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. Prostokąt o bokach $n_1 \times n_2$ można wypełnić płytkami o bokach $m_1 \times m_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[(m_1|n_1 \ \text{ i } \ m_2|n_2) \quad \text{lub} \quad (m_1|n_2 \ \text{ i } \ m_2|n_1)]$$

lub

$$[(m_1|n_1 \ \text{ i } \ m_2|n_1) \quad \text{i} \quad (n_2 = x \cdot m_1 + y \cdot m_2,\ x, y \in Z)],$$

lub

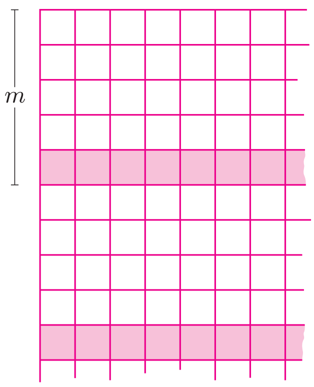
$$[(m_1|n_2 \ \text{ i } \ m_2|n_2) \quad \text{i} \quad (n_1 = x \cdot m_1 + y \cdot m_2,\ x, y \in Z)].$$

Twierdzenie 3. Kwadrat $n \times n$ można wypełnić kwadratami 2×2 i $m \times m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2|n$ lub $m|n$.

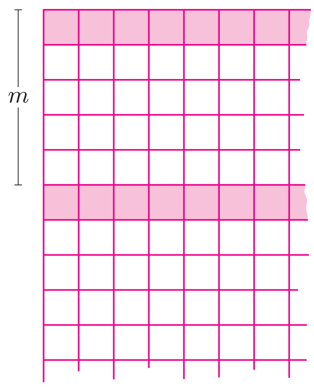
$\Longleftarrow$ Implikacja jest oczywista.

$\Longrightarrow$ Jeżeli m jest liczbą parzystą, to kwadrat o wymiarach $m \times m$ można wypełnić płytkami 2×2 i wówczas kwadrat $n \times n$ można wypełnić tylko płytkami o wymiarach 2×2. Zatem 2 musi dzielić n. Jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to przeprowadzę dowód nie wprost: Załóżmy, iż 2 i m nie dzielą n. Niech r będzie resztą z dzielenia n przez m: $n = A \cdot m + r$. Dzielimy kwadrat na dwa prostokąty, pierwszy o wymiarach $A \cdot m \times n$ i drugi o wymiarach $r \times n$. Rozpatrzymy teraz dwa przypadki.

Jeśli r jest nieparzyste, kolorujemy pewne pola kwadratu tak, jak na rysunku 3. Łatwo zauważyć, iż liczba białych pól w pierwszym prostokącie będzie parzysta i równa $A \cdot n \cdot (m-1)$. Natomiast w drugim prostokącie liczba białych pól to $r \cdot n$, co jest liczbą nieparzystą, gdyż ani r, ani n nie są podzielne przez 2. Z drugiej strony kwadrat $m \times m$ zajmie zawsze $(m-1) \times m$ białych pól (liczba parzysta), a kwadrat 2×2 dwa lub zero białych pól. Sprzeczność.



Rys. 3



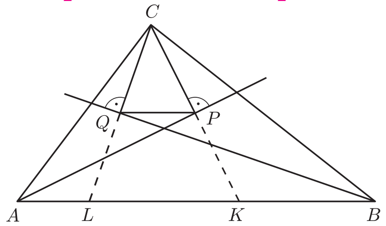
Rys. 4

Jeśli z kolei r jest parzyste, to kolorujemy pola kwadratu tak, jak na rysunku 4 i rozumowanie przebiega analogicznie jak w przypadku poprzednim.

Rozwiązanie zadania M 1090.

Oznaczmy przez K, L punkty przecięcia odpowiednio prostych CP i CQ z prostą AB. Wówczas $CP = PK$ oraz $CQ = QL$. Stąd wynika, że

$$PQ = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}(AK + BL - AB) = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)\,.$$



Rozwiązanie zadania M 1091.

Przypuśćmy, że

$$2^{2005} = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

gdzie liczby A, B, C, D są całkowite dodatnie. Równość tę dzielimy stronami przez największą możliwą potęgę liczby 4, sprowadzając ją do postaci $2^n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, gdzie liczba n oraz co najmniej jedna z liczb całkowitych dodatnich a, b, c, d jest nieparzysta. Przypuśćmy, że $n \geqslant 3$. Wówczas aby liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ była podzielna przez 4, każda z liczb a, b, c, d musiałaby być nieparzysta. Kwadrat każdej liczby nieparzystej przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, więc liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dawałaby resztę 4 z dzielenia przez 8, co stoi w sprzeczności z tym, że jest ona równa 2^n i $n \geqslant 3$. Zatem musi być $n = 1$, co również jest niemożliwe, gdyż $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że żądane przedstawienie nie istnieje.