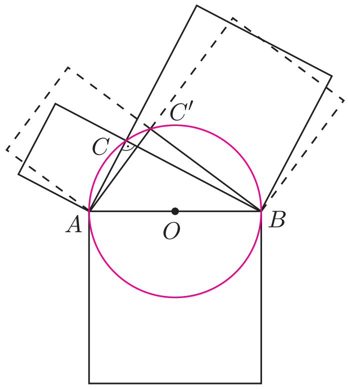
mała delta

Geometryczne osobliwości: niezmiennicze sumy

Ze szkolnej geometrii wiemy, że:

- □ suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa π; ogólniej: suma miar kątów wewnętrznych wypukłego n-kąta ($n \geqslant 3$) jest równa $(n-2)\pi$,
- □ dla kąta o mierze $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
- □ *elipsa* to zbiór punktów płaszczyzny, dla których suma odległości od dwóch ustalonych punktów jest stała.

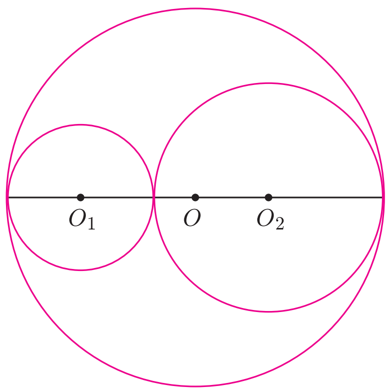
Oto kilka innych obserwacji geometrycznych tego typu. Wskazane w nich sumy nie zmieniają się nawet wtedy, gdy zmianie ulegają parametry figur, których te sumy dotyczą.



Rys. 1

A. (Dynamiczna interpretacja twierdzenia Pitagorasa.) W okrąg $O(r)$ wpisujemy trójkąt prostokątny ABC oparty na jego średnicy (rys. 1). Na zewnątrz trójkąta, na jego bokach, budujemy kwadraty. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa, $a^2 + b^2 = (2r)^2$. Zależność ta nie ulega zmianie, gdy wierzchołek C będzimy przemieszczać wzdłuż półokręgu AB ($C \neq A$ i $C \neq B$).

B. W okrąg $O(r)$ wpisujemy takie dwa okręgi styczne wewnętrznie $O_1(r_1)$ oraz $O_2(r_2)$, że $r_1 + r_2 = r$ (rys. 2). Wówczas suma obwodów wpisanych okręgów jest równa obwodowi okręgu opisanego: $2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi r$.



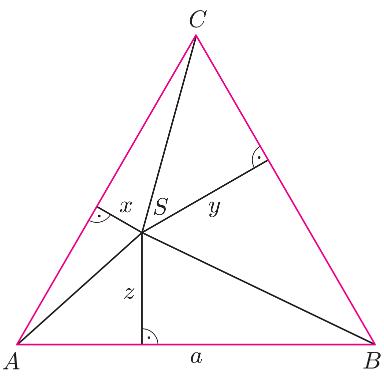
Rys. 2

C. (Twierdzenie Vivianiego) W trójkącie równobocznym ABC suma trzech odległości punktu wewnętrznego trójkąta S od boków tego trójkąta nie zależy od położenia tego punktu (rys. 3).

D. W trójkąt równoramienny ABC, o podstawie $2a$ i wysokości h, wpisujemy dwa styczne kwadraty leżące na podstawie AB (rys. 4). Wówczas suma długości boków tak wpisanych kwadratów jest stała: $x + y = \frac{2ah}{(a+h)}$ (jest średnią harmoniczną liczb a, h).

Z proporcji $\frac{p}{x} = \frac{a}{h}$ mamy $p = \frac{ax}{h}$. Z proporcji $\frac{q}{y} = \frac{a}{h}$ mamy $q = \frac{ay}{h}$.

Wstawiając otrzymane wartości do równania $p + x + y + q = 2a$ (długość odcinka AB), otrzymujemy oczekiwaną zależność.



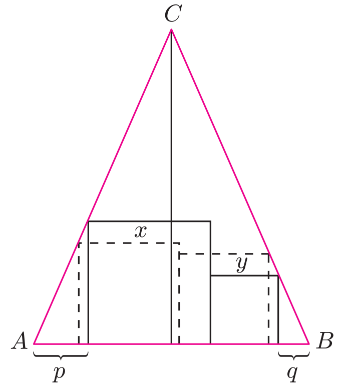
Rys. 3

E. W trójkącie równoramiennym ABC, o podstawie $2a$ i wysokości h, wpisujemy dwa styczne zewnętrznie półokręgi, których średnice leżą na podstawie AB (rys. 5). Wówczas suma promieni tak wpisanych półokręgów jest stała: $R + r = \frac{2ah}{h+\sqrt{a^2+h^2}}$. Z proporcji $\frac{R}{x} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$ mamy $x = \frac{R}{h}\sqrt{a^2+h^2}$. Z proporcji $\frac{r}{y} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$ mamy $y = \frac{r}{h}\sqrt{a^2+h^2}$.

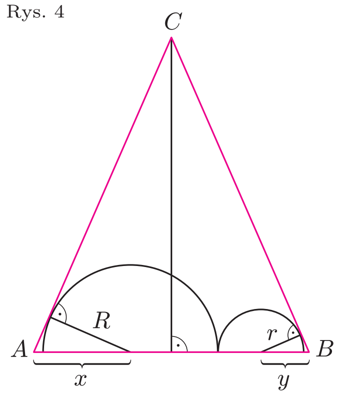
Wstawiając otrzymane wartości do równania $x + R + r + y = 2a$ (długość odcinka AB), otrzymujemy oczekiwaną zależność.

Uwaga. Analogiczną zależność mamy dla stycznych zewnętrznie półkul wpisanych w stożek, położonych na jego podstawie.

F. Przez podstawę AB trójkąta równobocznego ABC prowadzimy prostą K, a przez wierzchołek C prostą l, która nie ma punktów wspólnych z wnętrzem trójkąta. Na zewnątrz trójkąta w obszarach ograniczonych prostymi k i l dopisujemy styczne okręgi $O_1(r_1)$ oraz $O_2(r_2)$, (rys. 6). Wówczas $r_1 + r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Rozważając trójkąty prostokątne



Rys. 4



Rys. 5

tworzące trójkąt ACO_1, mamy $\frac{a-y}{r_1} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $\frac{y}{r_1} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a stąd

$$r_1 = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

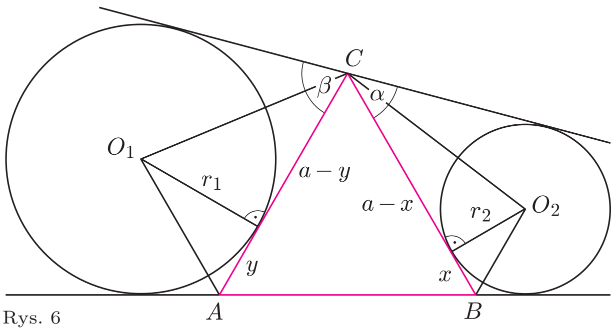
Prowadząc podobne rozważania dla trójkąta BCO_2, otrzymujemy

$$r_2 = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

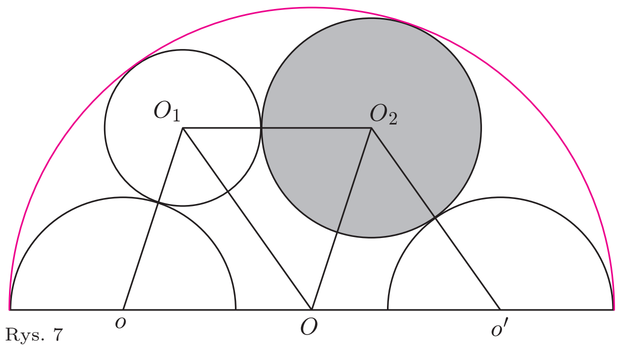
Korzystając z zależności $\alpha + \beta = \dfrac{2}{3}\pi$ oraz znanych zależności trygonometrycznych, po niezbyt uciążliwych rachunkach otrzymamy zapowiedzianą równość.

G. W półokrąg $O(R)$ wpisujemy dwa identyczne półokręgi $o(r)$ o promieniach $r < \frac{1}{2}R$ tak, że leżą one na średnicy okręgu $O(R)$ i są do niego styczne wewnętrznie (rys. 7). W pozostały obszar półokręgu $O(R)$ wpisujemy okrąg $O_1(d_1)$ styczny zewnętrznie do okręgu $o(r)$ oraz wewnętrznie do okręgu $O(R)$ (oczywiście: $\frac{Rr-r^2}{R+r} \leqslant d_1 \leqslant \frac{R^2-Rr}{R+r}$). Następnie w powstałą „lukę” wpisujemy okrąg styczny zewnętrznie do okręgów $O_1(d_1)$ i drugiego okręgu $o(r)$, oraz styczny wewnętrznie do okręgu $O(R)$. Dla tak wpisanych okręgów $O_1(d_1)$, $O_2(d_2)$ mamy $d_1 + d_2 = R - r$.

Załóżmy, że istnieje dokładnie jeden okrąg $O_2(d_2)$, jaki możemy wpisać w powstałą „lukę” (uzasadnienie tego faktu nie jest banalne). Oznacza to, że dla danych już punktów O, o, o', O_1 (będących środkami okręgów) istnieje dokładnie jedna konfiguracja z punktem realizująca opisane wyżej warunki.



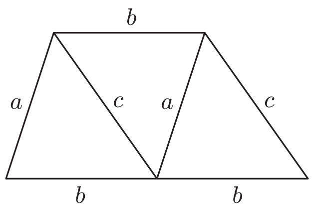
Rys. 6



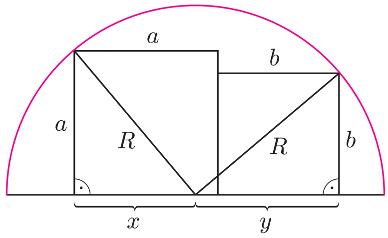
Rys. 7

Rozważmy teraz trzy trójkąty z rysunku 8, których boki mają długości: $a = r + d_1$, $b = d_1 + d_2$, $c = r + d_2$.

Prostymi rachunkami sprawdzamy, że wykreślając z wierzchołków tych trójkątów odpowiednie okręgi, zrealizujemy konfigurację spełniającą wyżej opisane warunki. Ponieważ taka konfiguracja (przy danych punktach O, o, o', O_1) jest dokładnie jedna, więc $|O_1O_2| = d_1 + d_2 = b$, gdzie $b = R - r$ (patrz na średnicę okręgu $O(R)$).



Rys. 8



Rys. 9

H. W półokrąg o promieniu R wpisujemy dwa stykające się bokami kwadraty leżące na średnicy (rys. 9). Suma pól tak wpisanych kwadratów jest stała: $a^2 + b^2 = R^2$. Przy oznaczeniach z rysunku 9 mamy $x^2 = R^2 - a^2$, $y^2 = R^2 - b^2$. Stąd $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$. Łącząc tę równość z zależnością $x + y = a + b$ (patrz rys. 7), obliczamy: $x = b$ i $y = a$, a stąd już wynika oczekiwana równość.

Odkrycie innych tego typu zależności może być nie tylko przyjemną, ale i inspirującą przygodą.

Jarosław GÓRNICKI

Literatura

1. H. Fukagawa, D. Pedle, *Japanese temple geometry problems (San Gaku)*, The Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, 1989.

2. L. C. Tien, *Constant-sum figures*, The Mathematical Intelligencer 23 (2001), 15–16.

3. J. Zydler, *Geometria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.