Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2005

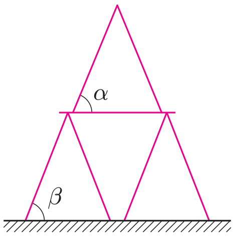
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

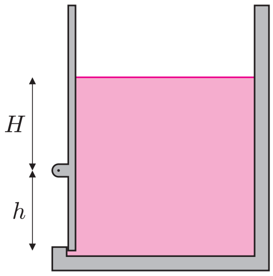
Zadania z fizyki nr 394, 395

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

394. Z siedmiu kart do gry zbudowano „domek”(zob. rys. 1). Jeśli współczynnik tarcia kart o stół i o siebie nawzajem jest równy $\mu = 0{,}25$, to jaka jest minimalna wartość kąta α między górnymi kartami a poziomem? Jaka jest minimalna wartość kąta β między dolnymi kartami a poziomem? Zakładamy, że kąt α jest jednakowy dla obu górnych kart, a kąt β – jednakowy dla czterech dolnych.

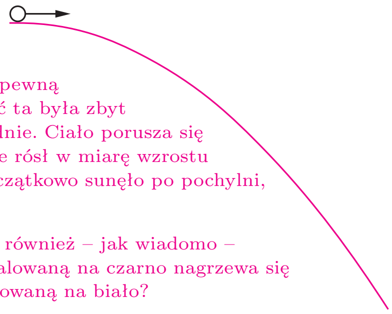


Rys. 2

395. Automatyczna spłuczka zawiera zbiornik, którego ścianka boczna może się obracać bez oporu wokół ustalonej osi (rys. 2). Jeśli wysokość ścianki poniżej osi obrotu jest równa h, to do jakiej wysokości H powyżej osi musi się nalać woda, aby ścianka się obróciła i zbiornik uległ opróżnieniu?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2004

Przypominamy treść zadań:



386. Małe ciało położono w najwyższym punkcie pochylni o kształcie paraboli o ramionach opadających i nadano mu pewną prędkość początkową w kierunku poziomym (rys.). Prędkość ta była zbyt mała, aby ciało oderwało się od pochylni i poleciało swobodnie. Ciało porusza się po pochylni bez tarcia. Czy nacisk ciała na pochylnię będzie rósł w miarę wzrostu prędkości ciała, czy malał? Czy możliwe jest, żeby ciało początkowo sunęło po pochylni, a w pewnym momencie się od niej oderwało?

387. Ciała będące dobrymi absorberami promieniowania są również – jak wiadomo – dobrymi emiterami. Dlaczego więc termometr z bańką pomalowaną na czarno nagrzewa się w promieniach Słońca silniej od termometru z bańką pomalowaną na biało?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
382 ($WT = 3{,}55$), **383** ($WT = 1{,}15$)
384 ($WT = 1{,}30$) i **385** ($WT = 2{,}65$)
z numerów 9/2004 i 10/2004

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	45,80
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	29,30
Jerzy Witkowski	– Radlin	24,55
Piotr Kumor	– Olsztyn	13,92
Konrad Kapcia	– Częstochowa	13,15

Kolejny rekord pobity! Już po raz szósty zdobył 44 punkty pan Andrzej Idzik, bezkonkurencyjny lider naszego peletonu!

386. Zapiszmy równanie paraboli w postaci $y = (1/2)kx^2$ (oś x jest pozioma, a oś y – pionowa ze zwrotem w dół), a prędkość ciała w najwyższym punkcie toru oznaczmy przez v_0. Zgodnie z treścią zadania spełniony jest warunek $kv_0^2 < \mathrm{g}$. Prędkość ciała w dowolnym punkcie wyznaczymy z zasady zachowania energii $v^2 = v_0^2 + 2\mathrm{g}y$, a siłę nacisku N – z równania $N = m\mathrm{g}\cos\alpha - mv^2/R$, gdzie α jest kątem nachylenia stycznej, a R – promieniem krzywizny. Należy tu podstawić

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}}$$

oraz (por. w poradnikach matematycznych wzory na krzywiznę wykresu funkcji)

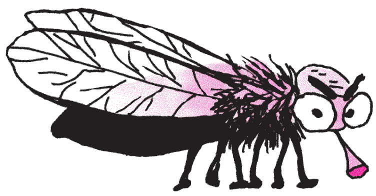
$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{k}{(1+k^2x^2)^{3/2}}.$$

Otrzymujemy

$$N = m\frac{\mathrm{g} - kv_0^2}{(1+k^2x^2)^{3/2}}.$$

Widzimy, że siła nacisku maleje, ale nie osiąga zera.

387. Odprowadzanie ciepła z bańki termometru do otoczenia zachodzi nie tylko wskutek emisji promieniowania, ale także wskutek kontaktu z powietrzem. Ten przepływ ciepła zależy tylko od temperatury termometru, a nie od jego pomalowania, co spowoduje wyższą temperaturę termometru pobierającego więcej energii promienistej (czarnego). Ponadto termometr pochłania głównie światło widzialne, a emituje promieniowanie podczerwone. Nie jest pewne, czy farba biała w świetle widzialnym jest równie biała w podczerwieni (a czarna w świetle widzialnym – równie czarna w podczerwieni).



Klub 44

Zadania z matematyki nr 497, 498

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2005

497. Dane są liczby rzeczywiste a, b. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 6ab \\ x^3+y^3+z^3 &= 3(a^3+b^3) \end{cases}$$

498. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie n-wyrazowe ciągi $(a_1,\ldots,a_n)$, spełniające warunki:

- liczby a_i są całkowite, $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 1$;
- $a_1+\ldots+a_n = 2n$;
- dla każdego układu wskaźników $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ (dla dowolnego k) suma $a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}$ jest różna od n.

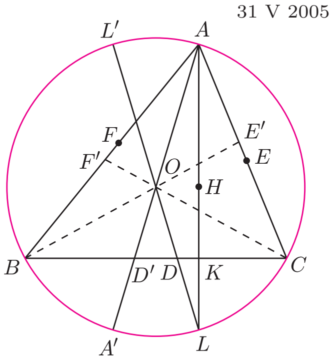
Zadanie 498 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2004

Przypominamy treść zadań:

489. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC, wpisanego w okrąg o środku O, przecinają się w punkcie H. Wykazać, że istnieją punkty D, E, F, leżące odpowiednio na bokach BC, CA, AB, takie, że $|OD|+|DH|=|OE|+|EH|=|OF|+|FH|$, a proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

490. Wyznaczyć liczbę permutacji π zbioru $\{1,\ldots,15\}$, spełniających warunek $|\pi(i{+}1)-\pi(i)|>1$ dla $i=1,\ldots,14$.



489. Oznaczmy przez O i R środek i promień okręgu opisanego, przez K – spodek wysokości z wierzchołka A, przez L – punkt przecięcia jej przedłużenia z okręgiem opisanym, a przez D oraz D' – punkty przecięcia średnic AA' oraz LL' z bokiem BC. Punkty L i H leżą symetrycznie względem K, więc $|OD|+|DH|=|OL|=R$. Symetralna boku BC jest osią symetrii prostokąta $ALA'L'$ (bo $AL \perp BC$); zatem $|BD|=|D'C|$, $|DC|=|BD'|$. Analogicznie określamy punkty E, E' na boku CA i punkty F, F' na boku AB. Otrzymujemy równości $|OE|+|EH|=|OF|+|FH|=R$ oraz

$$\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{|D'C|}{|BD'|}\cdot\frac{|E'A|}{|CE'|}\cdot\frac{|F'B|}{|AF'|}.$$

Stosujemy teraz dwukrotnie twierdzenie Cevy: odcinki AD', BE', CF' przechodzą przez punkt O, więc iloczyn po prawej stronie ma wartość 1. W takim razie również iloczyn po lewej stronie ma wartość 1, wobec czego odcinki AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Zatem punkty D, E, F mają wymagane własności.

490. Permutację π zbioru $\{1,\ldots,n\}$ interpretujemy jako uporządkowanie: ciąg, w którym element i znajduje się na pozycji $\pi(i)$. Niech $A_{n,k}$ będzie zbiorem tych permutacji zbioru $\{1,\ldots,n\}$ (dla $n\geqslant 2$), w których dokładnie k par liczb kolejnych i, $i{+}1$ trafia na pozycje sąsiadujące, przy czym para $n{-}1$, n nie jest jedną z nich; i niech $B_{n,k}$ będzie zbiorem tych permutacji, w których na sąsiadujące pozycje trafia para $n{-}1$, n oraz k innych par i, $i{+}1$ ($i\leqslant n-2$).
Oznaczmy moce zbiorów $A_{n,k}$ i $B_{n,k}$ odpowiednio przez $f(n,k)$ i $g(n,k)$. Dla $n=2$ mamy:

- $f(2,k)=0$ dla wszystkich $k\geqslant 0$;
- $g(2,0)=2$, $g(2,k)=0$ dla $k\geqslant 1$.

Należy wyznaczyć wartość $f(15,0)$. Wyprowadzimy dwie zależności rekurencyjne.
Z dowolnej permutacji $\pi\in A_{n,k}$ możemy uzyskać $n+1$ permutacji zbioru $\{1,\ldots,n{+}1\}$, umieszczając element $n{+}1$ na początku, na końcu, bądź gdziekolwiek między już ustawionymi elementami. Dostaniemy w ten sposób:
(1) k permutacji należących do zbioru $A_{n+1,k-1}$;
(2) 2 permutacje należące do zbioru $B_{n+1,k}$;
(3) $n-1-k$ permutacji należących do zbioru $A_{n+1,k}$.
Uzasadnienia: k permutacji (1) uzyskujemy, wkładając element $n{+}1$ pomiędzy pewne sąsiadujące i, $i{+}1$ (ponieważ $n{-}1$, n nie sąsiadują, więc będą to istotnie permutacje ze zbioru $A_{n+1,k-1}$). Dwie permutacje (2) powstaną przez umieszczenie elementu $n{+}1$ obok n, z lewej lub prawej strony. Umieszczenie elementu $n{+}1$ na dowolnej z pozostałych pozycji da permutacje (3).
Rozumując podobnie, stwierdzamy, że z permutacji $\pi\in B_{n,k}$ powstanie – przez dołączenie elementu $n{+}1$:
(4) k permutacji należących do zbioru $A_{n+1,k}$;
(5) 1 permutacja należąca do zbioru $B_{n+1,k}$;
(6) 1 permutacja należąca do zbioru $B_{n+1,k+1}$;
(7) $n-1-k$ permutacji należących do zbioru $A_{n+1,k+1}$.
Uzasadnienia: teraz $n-1$ i n sąsiadują – jest ponadto k innych sąsiadujących par i, $i+1$; rozdzielając je elementem $n+1$, dostajemy k permutacji (4). Umieszczając element $n{+}1$ obok n (po tej stronie, co $n-1$, lub po przeciwnej), dostaniemy permutacje (5) i (6). Permutacje (7) to wynik umieszczenia $n{+}1$ na innych pozycjach.
Zastępując k przez $k{+}1$, tak przepisujemy informację (1):
(1′) każda permutacja $\pi\in A_{n,k+1}$ daje $k+1$ permutacji z $A_{n+1,k}$.
Podobnie, „cofając” indeks k, przeformułowujemy informacje (6) i (7):
(6′) każda permutacja $\pi\in B_{n,k-1}$ daje 1 permutację z $B_{n+1,k}$;
(7′) każda permutacja $\pi\in B_{n,k-1}$ daje $n-k$ permutacji z $A_{n+1,k}$.
Z własności (1′), (3), (4), (7′) wynika wzór rekurencyjny $f(n+1,k)=(k+1)f(n,k+1)+(n-1-k)f(n,k)+{}$ $+kg(n,k)+(n-k)g(n,k-1)$; a z własności (2), (5), (6′) – wzór $g(n+1,k)=2f(n,k)+g(n,k)+g(n,k-1)$. (Wzory są słuszne także dla $k=0$, jeśli przyjąć, że $g(n,-1)=0$).
Otrzymane wzory rekurencyjne pozwalają obliczać wyrazy obu macierzy, $[f(n,k)]$ i $[g(n,k)]$. Oto ich początkowe wiersze:

f	$k=0$	1	2	3	…
$n=2$	0	0	0	0	…
3	0	2	0	0	…
4	2	8	2	0	…
5	14	34	22	2	…

g	$k=0$	1	2	3	…
$n=2$	2	0	0	0	…
3	2	2	0	0	…
4	2	8	2	0	…
5	6	26	14	2	…

Kontynuując, osiągamy w skończonym (nie przesadnie długim) czasie wiersz piętnasty, a w nim szukaną wartość $f(15,0)=175\,203\,184\,374$.