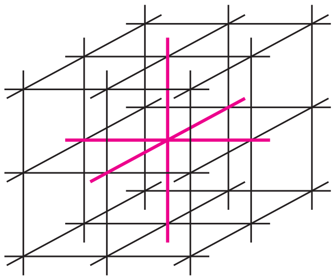
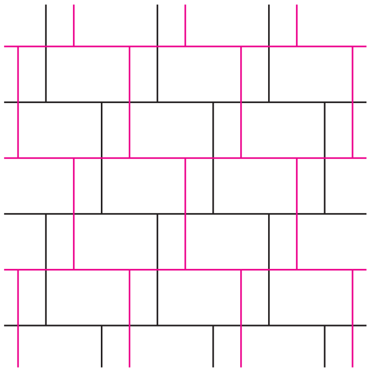
Wypełnianie przestrzeni

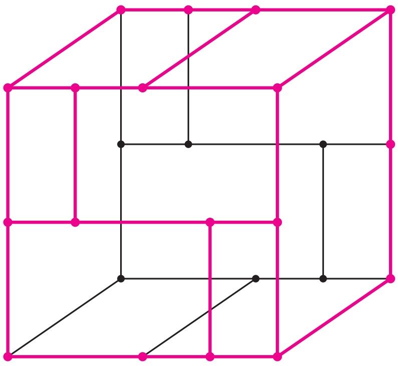
Marek KORDOS



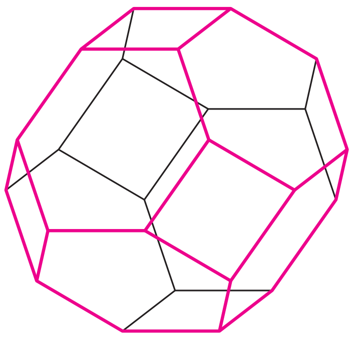
Normalne wypełnienie przestrzeni sześcianami



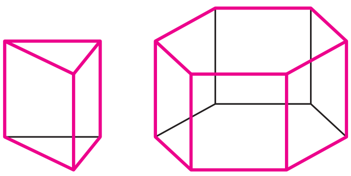
Minimalne wypełnienie sześcianami (widziane z kierunku jednej z krawędzi)



Sześcian jako czternastościan



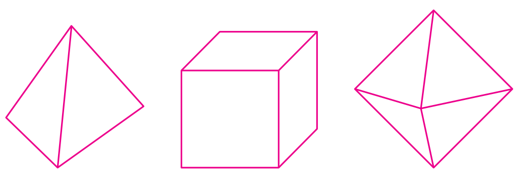
Czternastościan archimedesowy



Wypełniające przestrzeń graniastosłupy archimedesowe (ten z prawej znany jest w budownictwie drogowym jako **trylinka**)

Ten artykuł ma w sieci (www.mimuw.edu.pl/delta) interaktywny odpowiednik, gdzie można manipulować wypełniającymi przestrzeń wielościanami.

Problem wypełnienia przestrzeni bez luk jednakowymi wielościanami okazuje się wcale nie tak prosty, jak na pierwszy rzut oka można oczekiwać. Spośród pięciu wielościanów platońskich tylko jeden nadaje się do tego. Oczywiście jest to sześcian. O tym, że pozostałe nie mogą wypełnić przestrzeni, przekonać się łatwo: wystarczy zauważyć, że ich kąty dwuścienne nie składają się w żadnej liczbie na kąt pełny.



$70°32'$ $90°$ $109°28'$ $116°34'$ $138°11'$

Wypełnienie przestrzeni sześcianami może być zrealizowane na wiele sposobów. Najbardziej oczywisty z nich to taki, gdy w każdym wierzchołku spotyka się 8 sześcianów. W tym wypełnieniu poszczególne wielościany stykają się całymi ścianami – wypełnienie o tej własności nazywa się **normalne**.

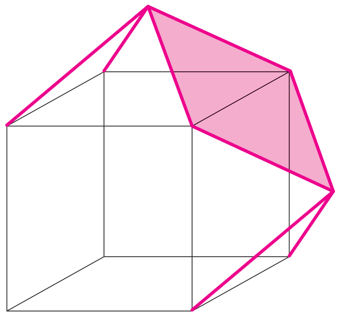
Można jednak sześciany tak ułożone poprzesuwać w ten sposób, by w żadnym punkcie nie stykało się ich więcej niż 4. Liczby tej nie można już zmniejszyć. Henri Lebesgue zauważył w 1911 roku (a potem udowodnił), że w każdym wypełnieniu przestrzeni (już niekoniecznie jednakowymi) wielościanami będą punkty, gdzie stykać się ich będzie co najmniej 4. Przyjęto to nawet za jedną z wersji definicji wymiaru: jeśli jakąś przestrzeń można wypełnić tak, że są punkty, w których styka się $(n+1)$ wypełniających obiektów i nie ma punktów, w których styka się ich więcej, to ma ona wymiar co najwyżej n. Zatem to nowe wypełnienie sześcianami realizuje minimum takiego n dla naszej przestrzeni, która jest trójwymiarowa. Wypełnienie realizujące minimum n nazywa się, oczywiście, **minimalne.**

Mamy więc dla sześcianu wypełnienie normalne, mamy też wypełnienie minimalne, ale nie mamy wypełnienia, które miałoby równocześnie obie te własności. Powstaje pytanie, czy istnieje wielościan, wypełnienie którym obie te własności ma.

Piękną drogę do znalezienia pozytywnej odpowiedzi na to pytanie wskazał Hugo Steinhaus. Radzi on mianowicie, aby zaobserwować ślady, jakie na każdym sześcianie wypełnienia minimalnego zostawią krawędzie sąsiednich sześcianów. Widzimy, że są to prostokąty, z których 8 ma jednak po sześć śladów wierzchołków sąsiednich sześcianów. Można by je więc traktować jak sześciokąty. Przy takim podejściu nasz sześcian ma więc 8 ścian sześciokątnych i 6 czworokątnych, czyli jest czternastościanem. I nasuwa się pytanie, czy takiej bryły nie można zdeformować tak (nie zmieniając liczby obu rodzajów ścian), by wszystkie one stały się foremne.

Okazuje się, że jest to wykonalne, a otrzymany wielościan to **czternastościan archimedesowy** (wielościany archimedesowe mają wszystkie ściany foremne i jednakowe naroża). Można go inaczej otrzymać, obcinając ośmiościanowi foremnemu naroża do $\frac{1}{3}$ długości krawędzi. Okazuje się więc, że istnieje wielościan archimedesowy realizujący wypełnienie równocześnie normalne i minimalne. Można udowodnić, że jest on – wśród wielościanów mających ściany foremne – jedyny.

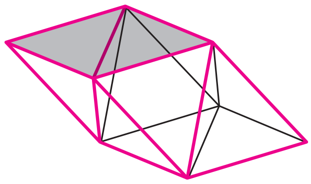
Jakie jeszcze wielościany archimedesowe mogą wypełnić przestrzeń? Tylko graniastosłupy o podstawach trójkątnych lub sześciokątnych (także czworokątnych, ale to są już wymienione sześciany). Wystarczy wypełnić płaszczyznę ich podstawami, by otrzymać warstwy w sposób oczywisty wypełniające przestrzeń.



Powstawanie dwunastościanu rombowego

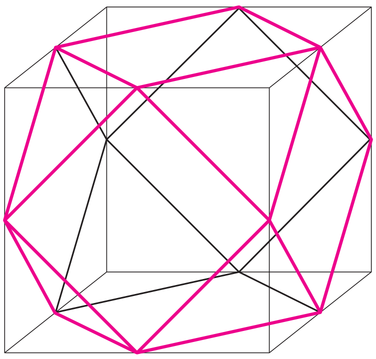
Spośród dość regularnych wielościanów wypełniających przestrzeń jest jeszcze jeden, zresztą pochodzący od sześcianu **dwunastościan rombowy**. Powstaje on przez dołączenie do sześcianu po jednej szóstej stykających się z nim sześcianów z wypełnienia normalnego. Trójkąciki, stanowiące boczne ściany dołączonych piramid, łączą się w romby, których jedną z przekątnych są krawędzie sześcianu. Sam sposób powstania dwunastościanu rombowego gwarantuje, że wypełnia on przestrzeń: wypełniające normalnie przestrzeń sześciany malujemy w szachownicę (mające wspólną ścianę są różnego koloru) i sześciany jednego z kolorów rozbijamy na piramidki doklejone do sąsiednich sześcianów.

Dwunastościan rombowy kończy listę wypełniających przestrzeń wielościanów z przystającymi ścianami. Zajmijmy się więc wypełnieniami złożonymi z rytmicznie ułożonych wielościanów dwóch rodzajów.



Równoległościan z ośmiościanu i dwóch czworościanów

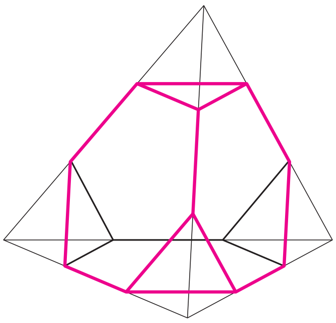
Okazuje się, że można przestrzeń wypełnić dwoma wielościanami platońskimi, a mianowicie ośmiościanami i czworościanami o takich samych krawędziach. Tutaj wystarczy zauważyć, że jeśli do dwóch przeciwległych (równoległych) ścian ośmiościanu dokleimy czworościany, to powstanie równoległościan (nawet rombościan), a wypełnienie przestrzeni równoległościanami nie przedstawia problemu.



Sześcioośmiościan

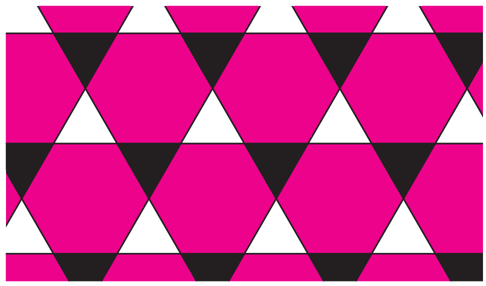
Wypełniającą przestrzeń parę: wielościan archimedesowy – wielościan platoński można utworzyć na dwa sposoby. Będzie to **sześcioośmiościan** (powstały przez obcięcie sześcianowi lub ośmiościanowi wierzchołków przez połowy krawędzi) i ośmiościan (oba wielościany muszą mieć krawędzie tej samej długości) oraz **czworościan przycięty** (obcinamy czworościanowi wierzchołki w jednej trzeciej długości) i … czworościany. Ten ostatni przykład jest szczególnie interesujący, bo łączymy przycięte czworościany z tym, co im do bycia zwykłym czworościanem brakuje – a przecież wypełnić przestrzeni zwykłymi czworościanami się nie da.

Sześcioośmiościany sklejamy kwadratowymi ścianami, a to, co każdemu z nich brakuje do bycia sześcianem, to akurat jedna ósma ośmiościanu, więc ośmiościany wypełnią powstałe luki.



Czworościan przycięty

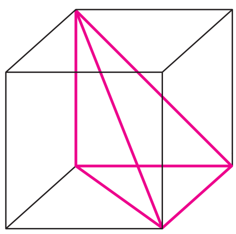
Znacznie trudniejsza jest sprawa z czworościanami przyciętymi. Aby wypełnić nimi przestrzeń, należy ustawić je sześciokątnymi ścianami na płaszczyźnie w sposób pokazany na rysunku. To, co „wyjdzie”, będzie przypominało paletę do jajek. Drugą taką paletę obracamy o 180° i nakładamy na pierwszą. Okaże się, że luki będą akurat czworościanami. I tak otrzymanymi warstwami wypełniamy przestrzeń – tutaj eksperyment manualny (bądź wirtualny) wydaje się konieczny.



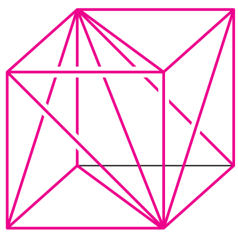
Tak ustawiamy na płaszczyźnie podstawy czworościanów przyciętych; na czarno zaznaczone są trójkątne ściany palety nałożonej z przeciwnej strony, białe trójkąty to luki na czworościany.

Zagadnienie wypełnienia przestrzeni pojedynczymi, ale mniej regularnymi wielościanami jest trudne i jedynie dla czworościanów (już niekoniecznie foremnych) zrobiono kilka kroków naprzód.

W szczególności przestrzeń można wypełnić **czworościanami Hilla**. Jednym z nich jest czworościan $H_1(\frac{\pi}{4})$, będący uwypukleniem trzech kolejnych, mających różne kierunki krawędzi sześcianu.

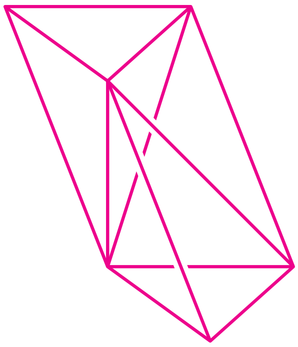


Czworościan $H_1(\frac{\pi}{4})$



Sześcian z czworościanów przystających do $H_1(\frac{\pi}{4})$

Pozornie rzecz wydaje się banalna, bo sześć takich czworościanów tworzy sześcian. Po chwili zauważamy, że czworościany tego wypełnienia są dwóch rodzajów – trzy mają jedną orientację, a pozostałe trzy inną. Można jednak, nieco inaczej układając te czworościany, wskazać prawdziwe wypełnienie.

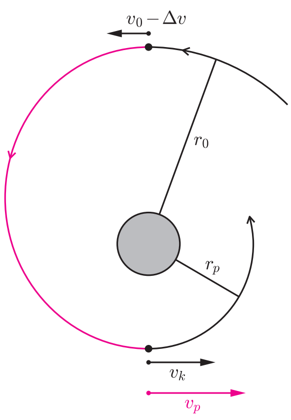


Tutaj trzy czworościany $H_1(\frac{\pi}{4})$ składają się na pochylony graniastosłup o podstawie trójkątnej, a takimi graniastosłupami przestrzeń wypełnia się w sposób oczywisty.

O trudności problemu wypełnienia przestrzeni jednakowymi czworościanami świadczy fakt, że pierwsza praca na ten temat ukazała się dopiero w 1923 roku, kiedy to D.M.Y. Sommerville udowodnił, że T_0, T_{12}, $H_1(\frac{\pi}{3})$ i $H_2(\frac{\pi}{4})$ (nazwy z tabeli) wypełniają przestrzeń. Lata późniejsze przynoszą publikacje wyników słabszych niż rezultat Sommerville'a. Dopiero M. Goldberg w 1974 roku udowodnił, że dobre są wszystkie $H_i(\alpha)$, czyli wszystkie wielościany Hilla (tabelka podaje dokładny opis takich czworościanów).

Trudno ten rezultat uznać za imponujący. Jest to ciekawe pole badań również dla naszych Czytelników, wymagające jedynie (czy też aż) sprawnej wyobraźni przestrzennej.

	krawędzie	długości	kąty dwuścienne
$H_1(\alpha)$	ab	$\sin\alpha$	α
	ac	$\sqrt{3}\cos\alpha$	$\pi/3$
	ad	1	$\pi/2$
	bc	1	$\pi/2$
	bd	$\sin\alpha$	$\pi-2\alpha$
	cd	$\sin\alpha$	α
$H_2(\alpha)$	ab	$2\sin\alpha$	α
	ac	$\sqrt{3}\cos\alpha$	$\pi/3$
	ad	2	$\pi/2$
	bc	$\sqrt{5\sin^2\alpha-1}$	$\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)$
	bd	$2\sin\alpha$	$(\pi/2)-\alpha$
	cd	$\sqrt{5\sin^2\alpha-1}$	$\arccos\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)$
$H_3(\alpha)$	ab	$2\sin\alpha$	α
	ac	$\sqrt{12}\cos\alpha$	$\pi/6$
	ad	$\sqrt{2+\sin^2\alpha}$	$\pi-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha\right)$
	bc	2	$\pi/2$
	bd	$\sin\alpha$	$\pi-2\alpha$
	cd	$\sqrt{2+\sin^2\alpha}$	$\pi-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha\right)$
T_0	ab	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
	ac	$\sqrt{2}$	$\pi/2$
	ad	2	$\pi/4$
	bc	1	$\pi/2$
	bd	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
	cd	$\sqrt{2}$	$\pi/2$
T_{12}	ab	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
	ac	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
	ad	$\sqrt{5}/2$	$\pi-\arccos\frac{2}{3}$
	bc	2	$\pi/4$
	bd	$\sqrt{5}/2$	$\frac{1}{2}\left(\pi+\arccos\frac{2}{3}\right)$
	cd	$\sqrt{5}/2$	$\frac{1}{2}\left(\pi+\arccos\frac{2}{3}\right)$



Rozwiązanie zadania F 638.

Promień orbity kołowej o prędkości v_0 to $r_0=\frac{GM}{v_0^2}$. Po hamowaniu prędkość to $v_0-\Delta v$, a zatem, korzystając z rozwiązania poprzedniego zadania, w perygeum prędkość pojazdu wyniesie

$$v_p=\left(\frac{2GM}{(v_0-\Delta v)\frac{GM}{v_0^2}}-1\right)(v_0-\Delta v)=\left(\frac{2v_0^2}{(v_0-\Delta v)^2}-1\right)(v_0-\Delta v),$$

a odległość od centrum to

$$r_p=\frac{GM}{v_0^2}\left(\frac{2v_0^2}{(v_0-\Delta v)^2}-1\right)^{-1}.$$

Prędkość na kołowej orbicie o promieniu r_p wynosi $v_k=\sqrt{\frac{GN}{r_p}}$, czyli po podstawieniu

$$v_k=\left(\frac{2v_0^2}{(v_0-\Delta v)^2}-1\right)^{-1/2}v_0,$$

więc pojazd musi zmniejszyć swoją prędkość o

$$\Delta v_2=\left(\frac{2v_0^2}{(v_0-\Delta v)^2}-1\right)(v_0-\Delta v)-\left(\frac{2v_0^2}{(v_0-\Delta v)^2}-1\right)^{-1/2}v_0.$$

Zauważmy, że chociaż pojazd dwa razy hamował (zmniejszał swoją prędkość), w wyniku manewrów jego prędkość wzrosła ($v_k>v_0$). Ten nieco zaskakujący wynik można łatwo zrozumieć, gdy zdamy sobie sprawę z tego, że przybliżając się do planety, statek zwiększył swoją energię kinetyczną kosztem potencjalnej.