Jak rozwiązać równanie Fibonacciego?

W 1202 roku bogaty kupiec Leonardo z Pizy (1180–1240), znany dziś powszechnie jako Fibonacci (co oznacza syn Bonacciego), opublikował w wieku 22 lat dzieło *Liber Abbaci* (Księga Abaku, czyli rachunku). W książce tej opisuje w sposób matematyczny, aczkolwiek bardzo niedokładny, przyrost liczby par osobników w populacji królików w kolejnych pokoleniach. Problem został przez niego postawiony w stylu wschodnim, a więc jako zagadka:

Ile par królików może zrodzić się z jednej pary w ciągu roku, jeśli
– każda para rodzi nową parę w ciągu miesiąca,
– para staje się płodna po miesiącu,
– króliki nie zdychają?

Wiekopomną zasługą Fibonacciego jest oczywiście raczej zainteresowanie matematyków równaniem o bardzo ciekawych własnościach, a nie oszałamiająca adekwatność jego modelu do zaobserwowanej rzeczywistości. Zobaczmy zatem, do jakiego równania prowadzą dość nonszalanckie założenia Leonarda z Pizy.

Oznaczmy liczbę par królików w n-tym pokoleniu przez $y(n)$. Początkowo mamy $y(1) = 1$ i $y(2) = 1$. Zapiszmy teraz równaniem podaną przez Fibonacciego regułę wzrostu populacji królików:

$$(F) \qquad y(n+2) = y(n+1) + y(n).$$

Oczywiście korzystając z warunku początkowego, możemy teraz obliczyć

$$y(3) = y(2) + y(1) = 1 + 1 = 2,$$

następnie, wstawiając do równania $y(2)$ i $y(3)$, wyliczamy

$$y(4) = y(3) + y(2) = 2 + 1 = 3,$$

i tak dalej. Otrzymujemy ciąg $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots,$ zwany ciągiem Fibonacciego.

Podana metoda obliczania n-tego wyrazu ciągu ma tę wadę, że jest wysoce kłopotliwa, gdy chcemy obliczyć, powiedzmy, tysięczny wyraz ciągu. Czy mamy wcześniej dokonać 997 obliczeń poprzednich wyrazów? Spróbujmy inaczej, tzn. zastanówmy się, czy da się wyliczyć n-ty wyraz ciągu Fibonacciego bez wyliczania wyrazów poprzednich? Jak to zrobić? Do równania (F) podstawmy $y(n) = \lambda^n$. Otrzymamy

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n.$$

Dzieląc równanie przez λ^n (co możemy zrobić, bo rozwiązanie $\lambda = 0$ jest dla nas mało przydatne), otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 = \lambda + 1.$$

Teraz przenosimy λ na lewą stronę, dodajemy do obu stron $\frac{1}{4}$

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

i, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, mamy

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Stąd

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{lub} \qquad \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Widzimy zatem, że zarówno ciąg $y_1(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, jak i ciąg $y_2(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ spełniają równanie (F). Niestety, żaden z nich nie spełnia warunku początkowego (tzn. warunku $y(1) = y(2) = 1$). Rozważmy jednak ciągi postaci

$$y(n) = a \cdot y_1(n) + b \cdot y_2(n),$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Z łatwością sprawdzamy, że każdy taki ciąg spełnia równanie (F). Spośród tych ciągów chcielibyśmy wybrać taki, który spełnia warunek początkowy. Szukamy zatem takich a i b, by był spełniony układ równań

$$\begin{cases} 1 = a \cdot y_1(1) + b \cdot y_2(1), \\ 1 = a \cdot y_1(2) + b \cdot y_2(2). \end{cases}$$

Rozwiązanie układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nie jest sztuką nadmiernie trudną. W wyniku otrzymujemy

$$a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{oraz} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Czy potraficie teraz z pomocą kalkulatora obliczyć, ile – w przybliżeniu – będzie królików w pięćdziesiątym pokoleniu?

Małgorzata MIGDA i Ewa SCHMEIDEL