Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

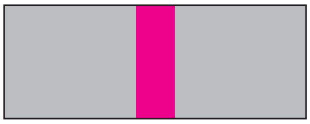
Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2005

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

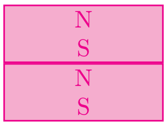
Zadania z fizyki nr 392, 393

Redaguje Jerzy B. BROJAN

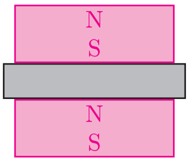


Rys. 1

392. Izolowany termicznie cylinder jest podzielony nieprzewodzącym ciepła tłokiem na dwie równe części zawierające jednakowe ilości tego samego gazu o temperaturze T_0 pod ciśnieniem p_0 (rys. 1). Do wnętrza doprowadzamy pewną ustaloną ilość ciepła Q (np. grzałką elektryczną). W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej: gdy całe ciepło dostarczymy do jednej części cylindra, czy gdy do każdej części dostarczymy połowę?



Rys. 2a



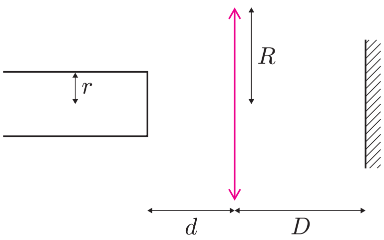
Rys. 2b

393. Jak wiadomo, silny magnes wrzucony do pionowej rury miedzianej lub aluminiowej spada dość powoli ze względu na efekty indukcyjne (prądy wirowe wzbudzane w rurze). Czy dwa takie magnesy połączone ze sobą jak na rysunku 2a spadają szybciej, czy wolniej niż pojedynczy magnes? A jak szybko – w porównaniu z tymi dwoma przypadkami – spadają te dwa magnesy rozdzielone lekką niemagnetyczną przekładką (rys. 2b)? Należy podać fizyczne uzasadnienie odpowiedzi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2004

Przypominamy treść zadań:

384. Na podstawie następujących danych:
a) promień orbity Księżyca wokół Ziemi $R_K = 380\,000$ km,
b) promień Ziemi $r = 6\,400$ km,
c) przyspieszenie ziemskie g i długość roku (powszechnie znane...),
oraz wiedząc, że pływy wywoływane przez Księżyc są około dwóch razy wyższe od wywoływanych przez Słońce, ocenić przybliżoną wartość stosunku masy Księżyca do masy Ziemi.



Rys. 3

385. Powierzchnia bardzo długiego walca o promieniu $r = 1$ cm wysyła światło. W odległości $d = 10$ cm od końca walca znajduje się przesłona z kołowym otworem o promieniu $R = 3$ cm, przy czym oś walca przechodzi przez środek otworu prostopadle do przesłony (rys. 3). Jaka powinna być ogniskowa f soczewki wypełniającej otwór, aby jasny krąg na ekranie odległym o $D = 15$ cm od przesłony był jak najmniejszy?

384. Wysokość pływów zależy od różnicy między wartościami siły grawitacji działającej na część Ziemi bliższą i dalszą od ciała niebieskiego wywołującego pływy. Odejmujemy więc

$$\Delta F = \frac{\mathrm{G}M_Z M}{(R-r)^2} - \frac{\mathrm{G}M_Z M}{(R+r)^2} \approx \frac{4\mathrm{G}M_Z M}{R^3}\cdot r,$$

gdzie M_Z jest masą Ziemi, M – masą Słońca lub Księżyca, a R – odległością do danego ciała. Widzimy, że decyduje stosunek masy ciała do sześcianu odległości od Ziemi. Zakładając, że wysokość pływów jest proporcjonalna do tego ilorazu, otrzymujemy stosunek wysokości pływów księżycowych do słonecznych równy $2 = \dfrac{M_K R_S^3}{M_S R_K^3}$. Ponadto według III prawa Keplera masa Słońca jest powiązana z okresem obiegu Ziemi T (długością roku) wzorem: $\dfrac{\mathrm{G}M_S}{R_S^3} = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$, a masa Ziemi – z jej promieniem i przyspieszeniem grawitacyjnym na jej powierzchni: $\dfrac{\mathrm{G}M_Z}{r^2} = \mathrm{g}$. Szukany stosunek mas Księżyca i Ziemi wynosi więc

$$\frac{M_K}{M_Z} = \frac{2R_K^3}{\mathrm{g}}\left(\frac{2\pi}{Tr}\right)^2 = 0{,}011.$$

Jego rzeczywistą wartością jest 0,0123, co wobec niedokładności oceny pływów oznacza bardzo dobrą zgodność.

385. Jeśli wziąć pod uwagę promienie nadbiegające z bardzo odległych części walca, to optymalną wartością f byłoby, oczywiście, $f_1 = D$. Promienie wybiegające z podstawy walca najlepiej zaś zogniskować, dobierając f zgodnie ze wzorem $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$. Gdy ogniskowa ma wartość pośrednią między f_1 a f_2, to nietrudno wykazać, że ze wzrostem f maleje r_1 (zewnętrzny promień kręgu na ekranie, utworzonego przez promienie nadbiegające z dużej odległości), a rośnie r_2 (promień
kręgu promieni nadbiegających z podstawy). Z analizy

geometrycznej wynika ponadto, że promienie wybiegające z dowolnego punktu powierzchni bocznej walca nie oświetlają żadnej części ekranu wykraczającej poza powyższe dwa kręgi. Dlatego optymalną wartość f należy wybrać tak, aby r_1 i r_2 się pokryły.

Z rysunku 4 znajdujemy natychmiast $r_1 = R(D-f)/f$. Nieco bardziej skomplikowana jest analiza rysunku 5, na którym zaznaczono promienie wybiegające z punktu na brzegu podstawy walca. Obraz tego punktu leży w odległości $y = \dfrac{fd}{d-f}$ od soczewki i w odległości $r' = r\dfrac{y}{d} = \dfrac{rf}{d-f}$ od osi optycznej.

Promień r_2 kręgu na ekranie znajdziemy z proporcji

$$\frac{R-r'}{y} = \frac{R-r_2}{D}.$$

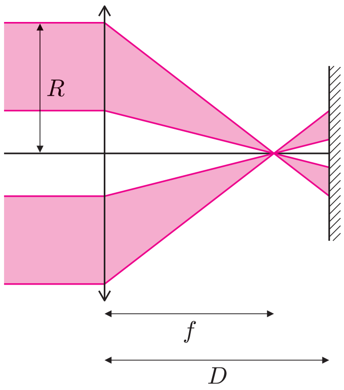
Stąd

$$r_2 = R - \frac{RD}{fd}(d-f) + \frac{Dr}{d}.$$

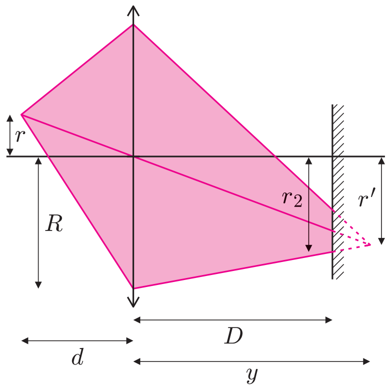
Po przyrównaniu r_1 do r_2 znajdujemy rozwiązanie

$$f = \frac{2RDd}{2Rd + RD + rD} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Wtedy $r_1 = r_2 = (R+r)D/(2d) = 3$ cm. Podany wzór algebraiczny obowiązuje tylko dla $R \geqslant r$. W przeciwnym wypadku, oczywiście, $f = \dfrac{Dd}{D+d}$.



Rys. 4



Rys. 5

A oto najbardziej istotne uwagi w związku z rozwiązaniami przysłanymi w ostatnim roku.

Zadanie **362** [Powietrze ucieka przez dziurkę w ścianie stacji kosmicznej] (współczynnik trudności $WT = 3{,}20$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 2$). Obaj autorzy dobrych rozwiązań – **A. Idzik** i **T. Wietecha** – obliczyli ilość wypływającego gazu w ten sposób, że rozpatrywali ruch poszczególnych cząsteczek, tak jakby trafiały one do otworu niezależnie od siebie. Długość drogi swobodnej cząsteczek w powietrzu pod normalnym ciśnieniem wynosi jednak tylko około 10^{-7} m, czyli znacznie mniej od średnicy otworu. Dlatego sądzę, że lepiej jest uznać powietrze za płyn ciągły, tak jak w rozwiązaniu wzorcowym. Z drugiej strony, ono też zawiera pewną niedokładność: ilość wypływającego gazu zależy nie tylko od powierzchni otworu, ale i od kształtu „dyszy”, a gdy krawędzie otworu są ostre, zwężanie się strumienia za otworem powoduje około dwukrotne zmniejszenie przepływu (tzw. efektywna powierzchnia otworu jest równa $\frac{1}{2}S$).

Zadanie **372** [Moc silnika, którego wirnik jest napędzany silnikami odrzutowymi] ($WT = 2{,}50$, $LPR = 1$). W rozwiązaniu pominięty został pewien istotny element: siła odśrodkowa „tłoczy” paliwo do silników, a dostarczana w ten sposób energia zwiększa prędkość wylotową gazu. Wiąże się to z błędem o poważniejszym charakterze – podane rozwiązanie (według którego maksymalna moc wystąpiłaby wtedy, gdy wylatujące gazy będą w spoczynku względem Ziemi) jest sprzeczne z zasadą zachowania momentu pędu! Po uwzględnieniu tej zasady zachowania okazuje się, że jeśli przyjmiemy ustaloną (jak w treści zadania) prędkość wylotową gazu, to maksymalna moc i prędkość kątowa, przy której ta moc jest osiągana, są dwukrotnie mniejsze od wartości podanych w *Delcie*.

Zadanie **374** [Maksymalna wysokość osiągnięta przez grudkę błota oderwaną od opony] ($WT = 1{,}57$, $LPR = 10$). **P. Ładyżyński** znalazł rozwiązanie tego zadania w podręczniku Butikowa, Bykowa i Kondratiewa *Fizyka*. Odnotujmy przy okazji wyjątkowo dużą liczbę rozwiązań nadesłanych w tej serii. Dla drugiego zadania **375** [Ciepło właściwe gazu zamkniętego tłokiem, na który działa sprężyna] wartości WT i LPR wyniosły odpowiednio 1,82 i 9.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 381 zadaniach

Zbigniew Galias	Kraków	42,38
Andrzej Idzik	Bolesławiec	5–40,42
Tomasz Rudny	Warszawa	31,48
Jacek Piotrowski	Rzeszów	1–29,30
Jerzy Witkowski	Radlin	23,50
Marian Łupieżowiec	Zebrzydowice	22,14
Tomasz Wietecha	Tarnów	5–19,44
Michał Jóźwikowski	Błonie	14,77
Leszek Grzanka	Chechło	14,03
Piotr Kumor	Olsztyn	13,92
Jacek Konieczny	Poznań	12,77
Konrad Kapcia	Częstochowa	11,85
Piotr Ładyżyński	Michalin	10,21
Kazimierz Gryszko	Gliwice	9,18
Radosław Poleski	Kołobrzeg	8,65
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	2–6,93
Ryszard Woźniak	Kraków	6,56

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2002–2004 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 6 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F

(w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (5), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki

(jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;

„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2005

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
483 (WT=2,04) i 484 (WT=1,84)
z numeru 6/2004

Józej Siwy	–	1–43,54
Witold Bednarek	–	2–43,23
Zbigniew Sewartowski	–	41,52
Andrzej Jóźwik	–	40,64
Bartłomiej Dyda	–	3–40,39
Marian Łupieżowiec	–	39,64
Michał Jóźwikowski	–	38,07
Jerzy Witkowski	–	3–35,83
Andrzej Daniluk	–	1–34,80
Tomasz Rawlik	–	5–33,74
Nikodem Szpak	–	33,42
Marcin Kasperski	–	2–33,10
Adam Dzedzej	–	31,71
Tomasz Warszawski	–	30,61
Tomasz Wietecha	–	6–29,76
Marek Prauza	–	3–29,42
Mieczysław Jędrzejowski	–	27,23
Leszek Grzanka	–	26,92
Paweł Walter	–	26,78
Jan Czardybon	–	24,61
Piotr Kumor	–	8–22,89
Maciej Mostowski	–	1–20,04

Legenda (przykładowo): stan konta 8–22,89 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 22,89 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2002, 2003 lub 2004.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, ktorzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M
(w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (5), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (8), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (7), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (6), T. Józefczyk, J. Witkowski, W. Bednorz, B. Dyda, M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit, J. Cisło

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Zadania z matematyki nr 495, 496

Redaguje Marcin E. KUCZMA

495. Wyznaczyć zbiór tych liczb wymiernych dodatnich, które można przedstawić w postaci ułamka $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ dla pewnych liczb naturalnych a, b, c, d.

496. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie BIC w punktach I i D; prosta BI przecina okrąg opisany na trójkącie CIA w punktach I i E; prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie AIB w punktach I i F. Wyznaczyć największą możliwą wartość iloczynu $\dfrac{|AI|}{|AD|}\cdot\dfrac{|BI|}{|BE|}\cdot\dfrac{|CI|}{|CF|}$.

Zadanie 496 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2004

Przypominamy treść zadań:

487. Wyznaczyć wszystkie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, mające ciągłą pochodną f' i spełniające nierówność $f'(x)\geqslant (f(x))^2$ dla $x\geqslant 0$.

488. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele układów 23 kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej.

487. Oczywiście $f(x)\equiv 0$ jest jedną z szukanych funkcji. Wykażemy, że nie ma innych. Przypuśćmy, że f jest inną taką funkcją i że $f(a)=c>0$ dla pewnego $a\geqslant 0$.

Funkcja f ma nieujemną pochodną, więc jest niemalejąca. Zatem dla $x\geqslant a$ mamy $f'(x)\geqslant \big(f(x)\big)^2\geqslant \big(f(a)\big)^2=c^2$, skąd wynika, że funkcja f rośnie nieograniczenie, przyjmując wszystkie wartości z przedziału $\langle c;\infty)$. W szczególności każda liczba naturalna $n\geqslant N=\lceil c\rceil$ jest wartością $n=f(a_n)$ dla pewnego $a_n\in\langle a;\infty)$; ciąg (a_n) jest rosnący, bo funkcja f jest rosnąca.

Dla $x\in\langle a_n;a_{n+1}\rangle$ zachodzi nierówność $f'(x)\geqslant\big(f(x)\big)^2\geqslant\big(f(a_n)\big)^2=n^2$. Wobec tego

$$f(a_{n+1})-f(a_n)\geqslant n^2(a_{n+1}-a_n)\qquad\text{dla}\ \ n\geqslant N.$$

Lewa strona tej nierówności ma wartość 1. Tak więc $a_{n+1}-a_n\leqslant n^{-2}$ dla $n\geqslant N$. Ze zbieżności szeregu $\sum n^{-2}$ wynika teraz, że ciąg (a_n) jest ograniczony.

Daje to żądaną sprzeczność; jeśli bowiem wszystkie liczby a_n leżą w pewnym przedziale $\langle a;b\rangle$, to znaczy, że funkcja f przyjmuje na tym przedziale wszystkie wartości naturalne $n\geqslant N$, wbrew temu, że – jako funkcja ciągła – musi być na tym przedziale ograniczona. Zatem jedyną funkcją spełniającą postawiony warunek jest funkcja równa tożsamościowo zeru.

488. Mamy dowieść, że równanie

$$(x-11)^2+\ldots+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+11)^2=y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y $(x>11)$. Przekształcamy to równanie do postaci $23\,x^2+2(1^2+\ldots+11^2)=y^2$, czyli $23\,x^2+23\cdot 44=y^2$. Jeśli para (x,y) jest rozwiązaniem, to $y=23\,t$ dla pewnej liczby naturalnej t oraz $x^2-23\,t^2=-44$. Próbując podstawień $t=1,2,3,4$, znajdujemy pierwsze rozwiązanie: $x_0=18$, $t_0=4$.

Określamy nieskończony ciąg par (x_n,t_n) wzorami rekurencyjnymi

$$x_{n+1}=24\,x_n+115\,t_n,\qquad t_{n+1}=5\,x_n+24\,t_n$$

(ciągi (x_n) i (t_n) są rosnące, więc wszystkie te pary są różne). Tak określone liczby spełniają równość $x_{n+1}^2-23\,t_{n+1}^2=x_n^2-23\,t_n^2$. Zatem wszystkie te pary są rozwiązaniami równania $x^2-23t^2=-44$.

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, W. Bednarek, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kieza, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, P. Najman, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Są chwile, nie częste wprawdzie, ale są, kiedy redaktor matematycznej ligi zadaniowej zazdrości swojemu koledze od fizyki. O co poszło tym razem, zaraz się wyjaśni.

Otrzymujemy od Czytelników listy; korzystamy z okazji, aby za wszystkie pięknie podziękować. I za te z różnymi ciepłymi życzeniami, i za wyrazy sympatii, i za słowa krytyki, czy wręcz oburzenia. A właśnie dostało się nam, i to nieźle. Co gorzej, słusznie.

Akurat rok temu było w lidze zadanie dotyczące pewnego ciągu zbiorów; cztery miesiące później pojawiło się rozwiązanie firmowe, zaczynające się od słów: *Prowadzimy dowód, przyjmując jako milczące założenie, że badane zbiory są różne.* No, coś takiego nie mogło nie wywołać zajadłych protestów. „Milczące założenie – a co to takiego?!” Każde twierdzenie stanie się banalne do udowodnienia, gdy zaczniemy „milcząco” dokładać różne pożyteczne założenia. Protestujący Czytelnicy świętą mają rację, nie da się ukryć...

Kłopot w tym, że bez owego „milczącego założenia” teza zadania po prostu nie jest prawdziwa. Czyli, nazywając rzecz po imieniu, daliśmy do udowodnienia fałszywe twierdzenie. Zwykła niestaranność przy redagowaniu tekstu zadania, zgubiony istotny warunek, a potem, przy pisaniu rozwiązania firmowego, próba udawania, że niby nic się nie stało. Teraz możemy tylko pięknie przeprosić. Szerzej o problemie niżej, w omówieniu szczegółowym, zadanie 476.

I wracamy do refleksji, od której zaczęliśmy, o lidze matematycznej i o fizycznej. Otóż do specyfiki zadań z fizyki należy to, że rozwiązujący sam powienien ustalić „rozsądne” warunki, niewspomniane w treści zadania, a dyktowane wyczuciem sensowności kontekstu; zdecydować, kiedy trzeba uwzględnić opór ośrodka, efekty relatywistyczne, promieniowanie tła, a kiedy tego robić nie należy; doprecyzować warunki, w jakich odbywa się doświadczenie; itp. Takiej swobody nie ma w zadaniu z matematyki – a w przypadku omawianego właśnie zadania aż się o nią prosi: dopisać założenie, przy którym zadanie dopiero nabiera sensu.

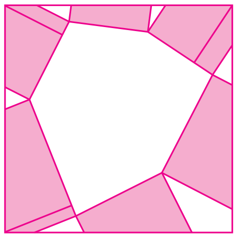
Na różne ciekawe rzeczy potrafią się nasi Czytelnicy w swoich listach uskarżać. Autor jednego z listów oburzył się, że któreś z zadań było zbyt łatwe i opatrzył to takim komentarzem: *Myślałem, że liga zadaniowa jest dla poważnych matematyków, a nie dla przedszkolaków.*

Już mniejsza o to, że regulamin ligi (`http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`) w punkcie 3 mówi wyraźnie: *Uczestnikiem ligi może być każdy* – nie zabrania więc udziału przedszkolakom. Wszelako z tą powagą... Redaktor ligi zadaniowej „poważnym matematykiem” raczej by się nie nazwał. Jakże więc wymagać od uczestników, by owo określenie do nich musiało pasować?

Krzepiąca jest jednak świadomość, że przynajmniej jeden uczestnik ligi za poważnego matematyka się uważa.

Przystąpmy teraz do omówienia wybranych zadań z minionego roku.

Zadanie **470** [W: n-kąt wypukły w kwadracie o boku 1 $\Rightarrow$ pewne trzy kolejne wierzchołki W rozpinają trójkąt o polu $\leqslant 8/n^2$] (współczynnik trudności $WT = 2{,}89$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 4$). Pełne rozwiązania podali **J. Cisło**, **M. Kieza**, **T. Warszawski**, **T. Wietecha** (oraz **P. Kumor**, który zadanie zaproponował). Wszyscy zaczęli od udowodnienia lematu, że obwód wielokąta W jest niewiększy niż obwód zawierającego go kwadratu; dowody podane przez dwóch autorów wymienionych w pierwszej kolejności działają także w sytuacji ogólniejszej, gdy kwadrat zastąpimy dowolnym innym wielokątem wypukłym, co **M. Kieza** wyraźnie zaznaczył; a dowód, który pokazał **J. Cisło** sprowadza się do starogreckiego „patrz!” – rysunek wiernie reprodukujemy (rys. 1). Z lematu od razu wynika, że pewne dwa kolejne boki mają łączną długość $\leqslant 8/n$ i rozpinają żądany trójkąt.


Rys. 1

Ponadto jeszcze dwaj inni uczestnicy przyjęli ten lemat bez dowodu i jakiegokolwiek komentarza; te rozwiązania zostały uznane za niepełne.

Zadanie **472** [Czy istnieje szereg zbieżny $\sum a_n$ taki, że szereg $\sum a_n^3$ jest rozbieżny?] ($WT = 1{,}37$; $LPR = 15$). Niestety, zadanie okazało się znane – kilku uczestników podało stosowne odsyłacze, z których najciekawszym jest wskazanie (przez **J. Klisowskiego**) książki W. Kaczor, M. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej*, a w niej takiego szeregu zbieżnego $\sum a_n$, że dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 2$ szereg $\sum a_n^k$ jest rozbieżny; oto ów przykład:

$$\tfrac{1}{2\ln 2} + \tfrac{1}{2\ln 2} - \tfrac{1}{\ln 2} + \ldots + \underbrace{\tfrac{1}{n\ln n} + \ldots + \tfrac{1}{n\ln n}}_{n} - \tfrac{1}{\ln n} + \ldots\,.$$

Zadanie **473** [Trapez $ABCD$ ($AB \| CD$) wpisany w okrąg Ω; okrąg ω – styczny wewnętrznie do Ω w punkcie T oraz do BC, CA; okrąg wpisany w $\triangle ABC$ styczny do AB w punkcie $K \Rightarrow D$, K, T współliniowe] ($WT = 3{,}70$; $LPR = 2$). Zadanie okazało się trudne – najwyższy WT od kilkunastu lat! Eleganckie rozwiązanie przedstawił **Tomasz Warszawski**:

Oznaczenia: $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCT|$, $\delta = |\sphericalangle ACT|$, $\varphi = |\sphericalangle ATK|$, $\psi = |\sphericalangle BTK|$. Należy udowodnić, że $\varphi = \alpha$ ($= |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ATD|$).

Przez punkt R przecięcia odcinka CT z okręgiem ω prowadzimy prostą styczną do ω, przecinającą CA i CB w punktach M i N; niech S będzie punktem styczności okręgu wpisanego w $\triangle NMC$ z bokiem NM; mamy $|NS| = |MR|$ oraz $|MS| = |NR|$, bo ω jest okręgiem dopisanym do $\triangle NMC$ (rys. 2). Przez punkt P styczności ω z BC prowadzimy z punktu T prostą przecinającą Ω w punkcie, który – jak łatwo wykazać – połowi łuk BC. Zatem

$$\alpha = |\sphericalangle BTC| = 2 \cdot |\sphericalangle PTR| = |\sphericalangle MNC|,$$

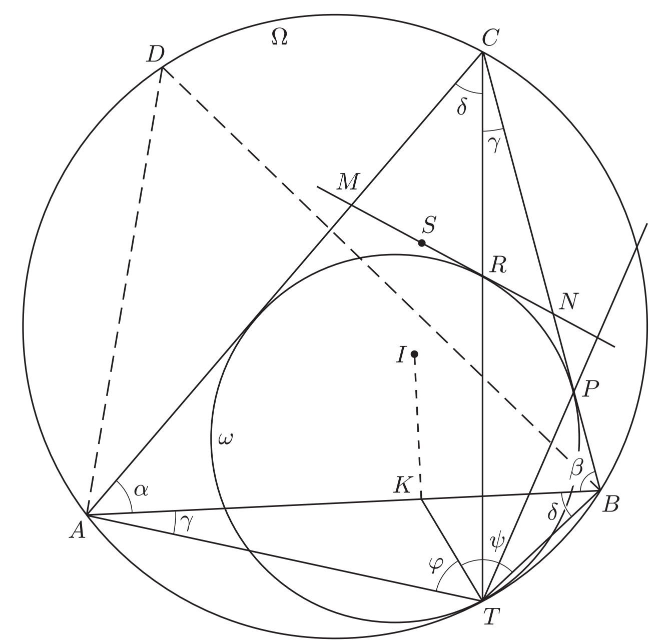
więc $\triangle ABC \sim \triangle NMC$. Stąd wynikają proporcje

$$\frac{|CM|}{|CN|} = \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{oraz} \quad \frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|NS|}{|MS|} = \frac{|MR|}{|NR|}\,;$$

a stosując wzór sinusów do trójkątów CNR, CMR oraz AKT, BKT dostajemy proporcje

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{|CM|}{|CN|} \cdot \frac{|NR|}{|MR|} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\,.$$

Zestawiając uzyskane równości otrzymujemy $\sin\varphi / \sin\psi = \sin\alpha / \sin\beta$; ponieważ zaś $\varphi + \psi = 180^\circ - |\sphericalangle ACB| = \alpha + \beta$, więc $\varphi = \alpha$.



Rys. 2

Autorem drugiego rozwiązania, bardziej zawiłego, ale też bezbłędnego, jest **Michał Kieza**.

Zadanie **477** [$x_1,\ldots,x_n \geqslant 0 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1+x_1^2+\ldots+x_k^2} < \sqrt{n}$] ($WT = 3{,}21$; $LPR = 5$). Tylko **J. Cisło** znalazł dowód indukcyjny, jak w rozwiązaniu firmowym. Inne rozumowanie przeprowadzili **M. Kieza**, **P. Kumor**, **J. Olszewski** oraz **T. Warszawski**, który dzięki właściwie dobranemu oznaczeniu $a_k = 1 + x_1^2 + \ldots + x_k^2$ ($a_0 = 1$) był w stanie przedstawić to rozumowanie krótko i klarownie:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right)} = \sqrt{n\left(1 - \frac{1}{a_n}\right)} < \sqrt{n};$$

pierwsza z nierówności ($\leqslant$) wynika z tego, że $a_{k-1} \leqslant a_k$, druga zaś jest zastosowaniem nierówności Cauchy'ego–Schwarza.

Zadanie **483** [O-R (orzeł-reszka); stop, gdy po nieparzystej serii O wystąpi R; $X :=$ liczba rzutów; $E(X) = ?$] ($WT = 2{,}04$; $LPR = 11$). Prawie wszystkie poprawne rozwiązania jak firmowe: sprowadzenie do ciągu Fibonacciego i sumowanie generowanego szeregu.

Ale w kilku pracach znalazło się coś takiego: niech E oznacza szukany średni czas. Startujemy; jeśli wypadnie R, wracamy do sytuacji początkowej (prawdopodobieństwo $P = \frac{1}{2}$); jeśli wypadnie OR, to koniec ($P = \frac{1}{4}$); jeśli wypadnie OO, wracamy do sytuacji początkowej ($P = \frac{1}{4}$); dostajemy równanie $E = \frac{1}{2}(E+1) + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}(E+2)$ i wynik $E = 6$.

Pięknie, pod warunkiem, że $E < \infty$; a tego, *a priori*, nie wiemy. To istotna luka i dlatego nie można tych rozwiązań uznać za poprawne; jedynie **P. Najman**, który także (choć nie tak prosto) wyprowadził równanie dla E, podał niezbędne uzasadnienie – sumowanie pewnego szeregu, skąd już w gruncie rzeczy niedaleko do rozwiązania firmowego.

Zadanie **476** [(A_i) – ciąg nieskończony zbiorów 4-elementowych; $\forall\, i, j$: $A_i \cap A_j \neq \emptyset \ \Rightarrow$ $\exists\, a, b, c\, \forall\, i$: $A_i \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$] ($WT = 2{,}88$; $LPR = 6?\ 4?$) To właśnie to zadanie z nieprawdziwą tezą; zachowaliśmy jego omówienie na koniec.

Kontrprzykład: $A_1, \ldots, A_{35}$ – wszystkie 4-elementowe podzbiory ustalonego zbioru 7-elementowego; a dla $i > 35$ przyjmujemy $A_i = A_{35}$.

Przy dodatkowym założeniu, że zbiory A_i są różne, już jest dobrze – vide rozwiązanie firmowe (wystarczy nawet tylko zażądać, żeby suma $\bigcup A_i$ była zbiorem nieskończonym).

Otrzymaliśmy dwie piękne prace, których autorzy **J. Cisło** i **P. Kumor** zauważyli brak tego istotnego warunku, podali stosowny kontrprzykład, a także dowód tezy po wprowadzeniu brakującego założenia. Sam kontrprzykład i stwierdzenie błędności tezy podali **A. Dzedzej** i **P. Kubit**; te prace, formalnie poprawne, otrzymały także ocenę maksymalną; stąd niższa wartość WT, niż w zamierzeniu redaktora ligi.

Natomiast **R. Dyja** i **J. Witkowski** przyjęli „milcząco" (bez komentarza) owo brakujące założenie (zresztą sugerowane przez użycie w treści zadania słowa *nieskończony* – tyle, że ciąg, nie zbiór) i udowodnili tezę; metoda jak w rozwiązaniu firmowym. Również i te rozwiązania zostały uznane za poprawne („poważny matematyk" zapewne się obruszy, jak można było uznać dowody dwóch wykluczających się zdań za dobre rozwiązania; i, jak w znanym żydowskim dowcipie, „on też będzie miał rację"...).

Odmienny dowód (przy warunku, że $S = \bigcup A_i$ jest zbiorem nieskończonym) przedstawił **Jerzy Cisło**: dla ustalonego n

$$\Phi_n := \{B \subset S\colon\ B \cap A_i \neq \emptyset \ \text{ dla } \ i \leqslant n\},$$

$$k_n := \min\{\,|B|\colon\ B \in \Phi_n\}, \qquad \Omega_n := \{B \in \Phi_n\colon\ |B| = k_n\}$$

(każda rodzina Ω_n jest skończona, bo $B \in \Omega_n \Rightarrow B \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n$). Nietrudno pokazać (korzystając z nieskończoności zbioru S), że $k_{n-1} \leqslant k_n \leqslant 3$, więc $\exists N\, \forall n \geqslant N$: $k_n = k_N$. Dla $n > N$ rodzina Ω_n zawiera się w Ω_{n-1}, więc $\exists M \geqslant N\, \forall n \geqslant M$: $\Omega_n = \Omega_M$; stąd łatwy wniosek, że dowolny zbiór $B_0 \in \Omega_M$ przecina wszystkie A_i (jeśli $|B_0| = k_N < 3$, uzupełniamy B_0 w dowolny sposób do trójki).

Autor zauważył ponadto, że to samo rozumowanie działa, gdy zamiast zbiorów 4-elementowych rozważa się zbiory ℓ-elementowe o nieskończonej sumie; w tezie uzyskuje się wówczas, zamiast trójki $\{a, b, c\}$, pewien zbiór $(\ell{-}1)$-elementowy.

Taki sam dowód podał również **Piotr Kumor**; nie poprzestał na tym i dołączył jeszcze jeden dowód, który pokazuje słuszność tezy dla ciągów (A_i) zbiorów 4-elementowych parami różnych, nierozłącznych – nie tylko dla ciągów nieskończonych, ale i dla skończonych, dostatecznie długich. Idea: zbiory A_i to wierzchołki grafu pełnego o krawędziach pomalowanych trzema kolorami (kolor krawędzi ij zależy od tego, czy $A_i \cap A_j$ jest zbiorem jedno-, dwu-, czy trójelementowym) i można zastosować metody teorii Ramseya; okazuje się, że „jest dobrze", gdy długość ciągu przekracza liczbę Ramseya $R(14, 20, 14)$. To ogromna liczba; ale autor pracy znacznie poprawił oszacowanie: ujrzawszy rozwiązanie firmowe, dosłał list z uwagą, że po niewielkiej modyfikacji daje ono tezę dla ciągów (A_i) długości skończonej $\geqslant 258$. Cała ta praca to kawał świetnej roboty, panie Piotrze!

(A jaka jest minimalna długość, gwarantująca słuszność tezy? Pytanie otwarte...)

Zadanie okazało się interesujące – wiele sposobów dowodu, ciekawe uogólnienia – szkoda, że przeoczenie w sformułowaniu treści obniżyło jego rangę w konkursie.