# Teoria stabilności w sensie Lapunowa i globalne atraktory

*Tomasz DŁOTKO*

Jednym z głównych narzędzi służących do matematycznego opisu otaczającego nas świata są równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe. W prostszych z nich, równaniach zwyczajnych, występuje pochodna szukanej funkcji $x$ zmiennej rzeczywistej $t$ (mającej najczęściej interpretację *czasu*). Ponieważ pochodna $x'(t)$ opisuje wzrost bądź malenie funkcji $x$ w chwili $t$, możemy uważać, że takie równania opisują *zmienność* bądź *ewolucję* wielkości $x$ w czasie. Często zamiast jednego równania różniczkowego zwyczajnego badamy cały układ takich powiązanych ze sobą równań. Przykładem może tu być dobrze znany z fizyki *układ równań ruchu Newtona* opisujący siłę $\boldsymbol{F}$ działającą na ciało:

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a} = m\,\boldsymbol{x}''(t),$$

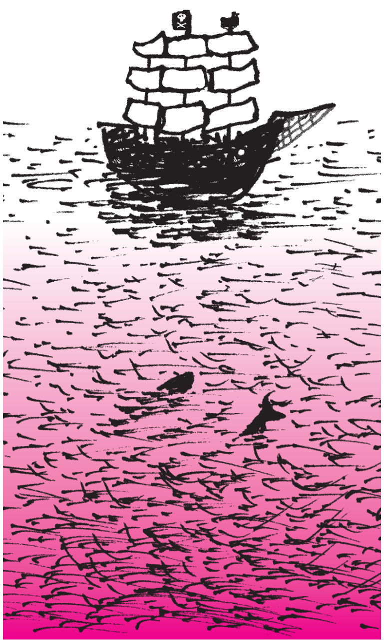
zapisany dla składowych wektora położenia $\boldsymbol{x}(t)$. We wzorze powyżej $m$ jest masą ciała, $\boldsymbol{a}(t)$ przyspieszeniem, zaś $\boldsymbol{x}(t)$ położeniem ciała w chwili $t$. Symbol $\boldsymbol{x}''(t)$ oznacza drugą pochodną położenia względem czasu, czyli wektor przyspieszenia.

Ponieważ nie każde równanie różniczkowe zwyczajne (a tym bardziej układ takich równań bądź równanie różniczkowe cząstkowe) potrafimy jawnie rozwiązać (podać wzór analityczny na rozwiązanie $x$), matematycy zajmujący się badaniem tych równań stawiają zazwyczaj trzy podstawowe pytania, na które starają się odpowiedzieć:

1. Czy badane równanie ma rozwiązanie o określonych własnościach (np. ograniczone, różniczkowalne)? – *istnienie rozwiązania.*

2. Czy takie istniejące rozwiązanie (spełniające ew. pewne dodatkowe warunki) jest tylko jedno czy też może ich być więcej? – *jednoznaczność rozwiązania.*

3. Jakie dodatkowe własności ma rozwiązanie (np. czy będzie określone dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$, czy może w pewnej chwili $t > 0$ przestaje istnieć)? Jeśli rozwiązanie istnieje dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$, to czy potrafimy opisać sposób jego zachowania po bardzo długim czasie? – *zachowanie asymptotyczne.*



Pomyślmy tu o trzech przykładach równań różniczkowych zwyczajnych, przy czym każde z tych równań rozpatrujemy z dodatkowym warunkiem (*warunkiem Cauchy'ego*) zadającym wartość rozwiązania w chwili $t = 0$ :

$$\text{a)}\ \begin{cases} x'(t) = x^2(t), \\ x(0) = a > 0, \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} y'(t) = \sin t, \\ y(0) = b, \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} z'(t) = -z(t), \\ z(0) = c. \end{cases}$$

Łatwo przekonamy się, że rozwiązania tych równań dane są wzorami:

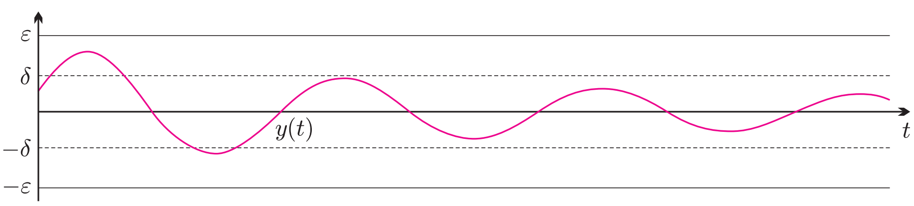
$$a)\ x(t) = \frac{1}{(1/a) - t}, \qquad b)\ y(t) = -\cos t + b + 1, \qquad c)\ z(t) = c\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Możemy zauważyć, że rozwiązanie $x$ jest dobrze określone dla czasów $t \geqslant 0$ bliskich zera, lecz w chwili $t = 1/a$ przestaje istnieć. Rozwiązania $y$ i $z$ istnieją natomiast dla wszystkich $t \geqslant 0$. Można więc mówić o ich *zachowaniu asymptotycznym*, gdy czas $t$ dąży do nieskończoności. Rozwiązanie $y$ *oscyluje* okresowo, natomiast rozwiązanie $z$ dąży do 0, gdy czas $t$ dąży do nieskończoności. Rozwiązanie $z$ ilustruje sposób zachowania, który nawiązując do nazwiska prekursora badania asymptotyki rozwiązań, określamy mianem *asymptotycznej stabilności w sensie Lapunowa* (matematyk rosyjski A.M. Lapunow badał to pojęcie już w 1892 roku). Uściślając naszą intuicję, powiemy, że rozwiązanie zerowe $y(t) \equiv 0$ równania różniczkowego zwyczajnego $y'(t) = f(t, y(t))$, jest *asymptotycznie stabilne*, jeżeli:

1. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że rozwiązania odpowiadające warunkom początkowym spełniającym nierówność $|y(0)| < \delta$ istnieją dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$ i spełniają oszacowanie $|y(t)| < \varepsilon$.

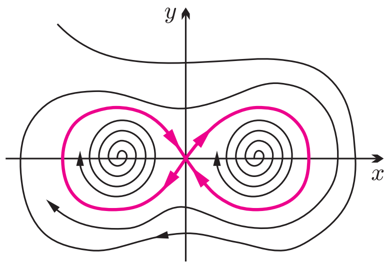
2. Rozwiązania dążą do zera, gdy czas $t$ dąży do nieskończoności.

Definicję tę ilustruje następujący rysunek.



Jeśli badane równanie nie ma rozwiązania zerowego, ale pewne jego rozwiązanie $x$ istnieje dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$, można badać stabilność asymptotyczną rozwiązania $x$, sprowadzając tę bardziej złożoną sytuację do opisanego powyżej przypadku asymptotycznej stabilności rozwiązania zerowego, rozpatrując różnicę $y - x$, gdzie $y$ jest innym rozwiązaniem badanego równania.

Idea stabilności asymptotycznej jest ważna z praktycznego punktu widzenia. Otóż, jeżeli równanie różniczkowe opisuje pewien proces fizyczny i rozwiązanie $x$ tego równania jest asymptotycznie stabilne, to możemy uważać, że po dostatecznie długim czasie zaobserwujemy praktycznie tylko wartości rozwiązań bardzo bliskie wartościom $x(t)$, niezależnie od tego, z jakiego warunku początkowego zaczerpniętego ze zbioru ograniczonego ten proces startował.

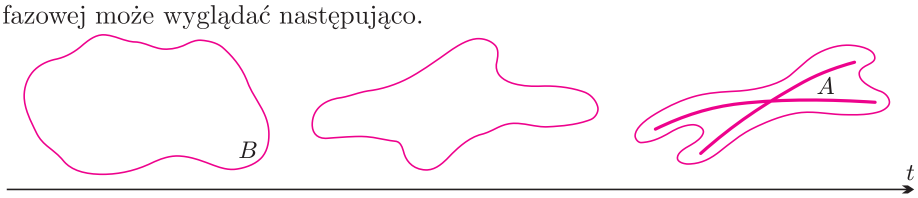


Kolorowa linia zamknięta jest właśnie zbiorem przyciągającym rozwiązania.

Szybki rozwój teoria stabilności rozwiązań równań różniczkowych przeżywała w drugiej połowie XX wieku. Trzeba tu wspomnieć nazwiska takich matematyków jak N.N. Krasowski, J.P. LaSalle, S. Lefschetz czy S. Yoshizawa. Pewnym niedostatkiem tej teorii jest jednak fakt, że zbiory, do których „przybliżają się” rozwiązania równań różniczkowych po długim czasie, są często bardziej złożone niż pojedynczy punkt (zerowe rozwiązanie równania). Popatrzmy na rysunek obok przedstawiający kształt *zbioru przyciągającego* dla prostego układu dwu równań różniczkowych na płaszczyźnie.

Zilustrowany powyżej przykład jest nadal znacznie prostszy od tych, które są typowe w teorii równań różniczkowych cząstkowych. W każdej chwili $t$ rozwiązanie takiego równania $u(t, \boldsymbol{x})$ jest *funkcją* zmiennej wektorowej $\boldsymbol{x}$. Zbiory, które *przyciągają* rozwiązania równań cząstkowych, leżą w przestrzeni funkcji i mają często bardzo złożoną strukturę. W ostatnich dwudziestu latach prowadzono intensywne badania *układów dyssypatywnych*, tzn. takich układów fizycznych, w których z upływem czasu następuje zanikanie bądź *rozpraszanie energii* (np. na skutek tarcia). Przykładem może tu być, opisujące przepływ cieczy nieściśliwej, *równanie Naviera–Stokesa* czy tzw. układy *reakcyjno-dyfuzyjne* modelujące procesy biologiczne. Dla równań różniczkowych opisujących układy dyssypatywne wprowadzono pojęcie *globalnego atraktora*. Jest to podzbiór przestrzeni, w której zmieniają się rozwiązania (*przestrzeni fazowej*), którego obraz, jako całości, nie zmienia się w czasie (*zbiór niezmienniczy*), zbiór ten jest *zwarty* oraz przyciąga orbity wszystkich ograniczonych podzbiorów przestrzeni fazowej.

Badając równanie różniczkowe opisujące układ dyssypatywny, możemy uważać, że jeżeli rozpatrzymy warunki początkowe należące do dowolnego ograniczonego zbioru $B$ przestrzeni fazowej, to po skończonym czasie odpowiadające im rozwiązania znajdą się w dowolnie małym otoczeniu atraktora. Globalny atraktor, a raczej jego dowolnie małe otoczenie, jest więc tym zbiorem, do którego każde rozwiązanie wpada po dostatecznie długim czasie i pozostaje w jego obrębie już na zawsze. Często globalne atraktory są zbiorami mającymi *skończony wymiar topologiczny* (tzn. można je utożsamiać lokalnie z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$). Jednak kształt atraktorów wiążących się z fizycznymi układami dyssypatywnymi jest często bardzo złożony, a same atraktory są *fraktalami*. Ewolucja w czasie obrazu ograniczonego podzbioru $B$ przestrzeni fazowej może wyglądać następująco.



Po dostatecznie długim czasie rozwiązania rozpoczynające się w zbiorze $B$ wchodzą do otoczenia globalnego atraktora $A$.

Do najbardziej znanych współczesnych matematyków badających teorię globalnych atraktorów należą: Jack K. Hale (USA), Roger Temam (Francja), A.V. Babin i M.I. Vishik (Rosja). Do dnia dzisiejszego powstają w ramach tej teorii nowe ciekawe rezultaty.

**Rozwiązanie zadania M 1085.**
Gdyby iloczyn
$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \ldots (a_7 - b_7)$$
był liczbą nieparzystą, to każdy czynnik tego iloczynu byłby także liczbą nieparzystą. Wtedy suma tych czynników byłaby również liczbą nieparzystą. To jednak jest niemożliwe, gdyż
$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_7 - b_7) = 0.$$