Symetria i prawdopodobieństwo

Krzysztof OLESZKIEWICZ

Pojęcie symetrii przydaje się w rachunku prawdopodobieństwa. Zacznijmy od najprostszego przykładu – tasujemy talię 52 kart do gry, a następnie odkrywamy kolejno karty z wierzchu talii i każdą z nich po obejrzeniu odkładamy na spód talii. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że następna karta po odkryciu asa pik będzie królem kier? Proste rozwiązanie polega na zauważeniu, że takie samo jest prawdopodobieństwo tego, iż owa karta będzie np. damą karo lub dowolną inną z 51 kart w talii różnych od asa pik. Mamy więc 51 jednakowych prawdopodobieństw, które w sumie dają 1, a zatem każde z nich jest równe 1/51, w szczególności szukane prawdopodobieństwo tego, iż następna karta będzie królem kier.

Inny prosty przykład dotyczy gry w orła i reszkę. Załóżmy, że rzucamy 15 razy symetryczną monetą.

Matematycy przewrotnie nazywają monetę symetryczną, jeśli zarówno orzeł, jak i reszka wypadają na niej z prawdopodobieństwem 1/2, a nie wtedy, gdy ma ona oś symetrii, a więc np. orła po obu stronach...

Za każdym razem, gdy wypadnie orzeł, zyskujemy 1 zł, a gdy wypadnie reszka, tracimy 1 zł. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, iż gra będzie dla nas korzystna, tzn. wśród 15 wykonanych rzutów będzie więcej orłów niż reszek. Zakładamy, że zaczynamy mając 15 zł, więc nie grozi nam bankructwo w trakcie gry. Łatwo zauważyć, że wszystkie możliwe wyniki gry (tzn. piętnastoelementowe ciągi orłów i reszek) można połączyć w pary, w których jeden ciąg otrzymamy przez zastąpienie orłów w drugim ciągu reszkami, a reszek – orłami. Na przykład ciągi ORRORROORORORRR i ROOROORROROROOO będą tworzyć taką parę. W ten sposób przyporządkowaliśmy każdemu zdarzeniu elementarnemu oznaczającemu zwycięstwo zdarzenie elementarne oznaczające przegraną, a przy tym przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne („jeden do jednego") i połączone w pary zdarzenia elementarne mają jednakowe prawdopodobieństwa, równe $1/2^{15}$. Zatem suma prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych oznaczających zwycięstwo jest równa sumie prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych oznaczających przegraną, czyli prawdopodobieństwo zwycięstwa jest równe prawdopodobieństwu przegranej, a że w sumie prawdopodobieństwa te muszą dawać 1 (15 jest liczbą nieparzystą, toteż remis nie jest możliwy), więc każde z nich jest równe 1/2, w szczególności szukane prawdopodobieństwo zwycięstwa.

Powyższy przykład może wydawać się zbyt prosty. Rozważmy więc zmodyfikowaną wersję tego problemu – gramy na tych samych zasadach, ale tym razem zaczynamy grę, mając tylko 12 zł i jeśli podczas gry nasz kapitał stopnieje do zera, bankrutujemy. Z jakim prawdopodobieństwem unikniemy bankructwa w ciągu 15 rzutów monetą? Umówmy się, że w przypadku bankructwa i tak wykonamy brakujące rzuty. Być może krupier prowadzący grę jest wspaniałomyślny i zgodzi się uwzględnić owe rzuty, niejako przejściowo nas kredytując, jeśli dzięki temu na końcu gry mielibyśmy znów dodatni kapitał. Mamy więc trzy wzajemnie się wykluczające zdarzenia losowe:

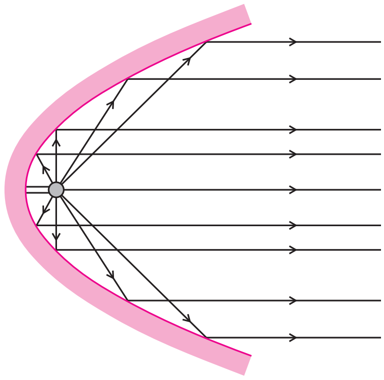
A – nie zbankrutowaliśmy,

B – zbankrutowaliśmy, ale wspaniałomyślność krupiera może nam pomóc,

C – zbankrutowaliśmy i nawet przejściowe kredytowanie nie pomoże.

Oczywiście $P(A)+P(B)+P(C)=1$. Wykażemy teraz, że $P(B)=P(C)$. W tym celu połączymy możliwe wyniki gry (tzn. piętnastoelementowe ciągi orłów i reszek) odpowiadające zdarzeniom B i C w pary. Zrobimy to w następujący sposób – jeśli jakiś ciąg wyników oznacza bankructwo w pewnym momencie gry, to wszystkie reszki występujące po tym momencie zamieniamy na orły, a orły – na reszki. Tak utworzony ciąg łączymy w parę z ciągiem wyjściowym.

Rozwiązanie zadania F 635. Całkowita moc emitowanego przez gorące ciało promieniowania elektromagnetycznego wynosi, z prawa Stefana–Boltzmanna, $P=\sigma T^4\cdot 4\pi r^2$.



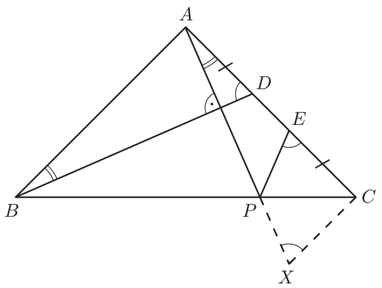
Geometria układu (rysunek) powoduje, że praktycznie całość promieniowania emitowana jest w kierunku równoległym do osi zwierciadła. Dla światła spełniona jest relacja między energią a pędem w postaci $E=pc$. Promieniowanie wyemitowane w czasie δt niesie więc ze sobą pęd

$$p=\frac{4\pi r^2}{c}\sigma T^4\delta t.$$

Oznacza to, że siła ciągu, czyli pęd unoszony przez promieniowanie w jednostce czasu, wynosi

$$F=\frac{4\pi r^2}{c}\sigma T^4.$$

Rozwiązanie zadania M 1084. Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej przechodzącej przez punkt C i równoległej do prostej AB z prostą AP.



Z równości

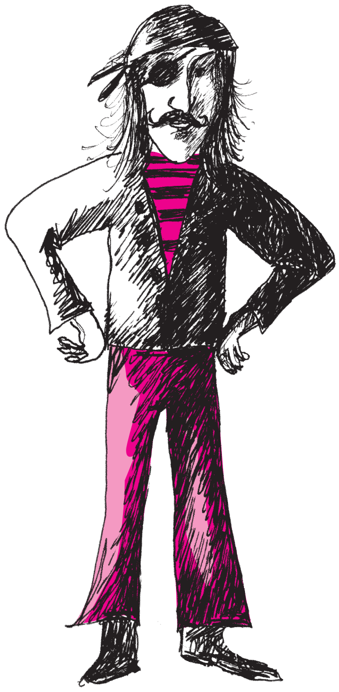
$$\sphericalangle DBA=90^\circ-\sphericalangle BAP=\sphericalangle XAC$$

oraz

$$AB=AC$$

wynika, że trójkąty prostokątne DBA i XAC są przystające. Zatem $CE=AD=CX$, skąd wynika, że trójkąty CPE i CPX są przystające. Stąd otrzymujemy

$$\sphericalangle PEC=\sphericalangle PXC=\sphericalangle BDA.$$



Wspaniałomyślny Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne, czyli że każde zdarzenie elementarne z B połączone jest w parę z dokładnie jednym zdarzeniem elementarnym z C i *vice versa*.

Na przykład ciąg RRRRRRRRRRRR-OOR połączymy w parę z ciągiem RRRRRRRRRRRR-RRO. W ten sposób ustalamy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między zdarzeniami elementarnymi składającymi się na B i zdarzeniami elementarnymi składającymi się na C. Istotnie, owa zamiana spowoduje zmianę znaku w końcowym rezultacie gry (przy założeniu, że krupier okaże się wspaniałomyślny), a ponieważ zaczynamy grę mając 12 zł, końcowy rezultat z pewnością będzie liczbą nieparzystą (bo 15 jest liczbą nieparzystą, a parzystość naszego kapitału zmienia się w każdej turze gry, niezależnie od tego, co wypadnie), a więc nie będzie zerem. Zauważmy teraz, że prawdopodobieństwo zdarzenia C łatwo obliczyć:

$$P(C) = \left(\binom{15}{15} + \binom{15}{14}\right)/2^{15} = (1+15)/2^{15} = 1/2048,$$

bo zajście zdarzenia C równoważne jest temu, iż wszystkie rzuty albo wszystkie oprócz jednego dały jako wynik reszkę, a temu odpowiada dokładnie 16 zdarzeń elementarnych:

RRRRRRRRRRRRRRR, ORRRRRRRRRRRRRR, RORRRRRRRRRRRRR, . . . , RRRRRRRRRRRRROR, RRRRRRRRRRRRRRO,

z których każde ma prawdopodobieństwo $1/2^{15}$. Jeśli w dokładnie n rzutach wypadną reszki, to grę (kredytowaną) zakończymy z kapitałem

$$12 + (15-n) - n = 27 - 2n \text{ zł},$$

a $27-2n$ będzie liczbą dodatnią tylko wtedy, gdy $n \leqslant 13$. Skoro $P(C) = 1/2048$, to i $P(B) = 1/2048$, a zatem

$$P(A) = 1 - P(B) - P(C) = 1023/1024 \simeq 99{,}9\%.$$

Z kwotą 12 zł możemy więc siadać do 15 tur gry w orła i reszkę, nie obawiając się zbytnio bankructwa, nawet jeśli nie jesteśmy pewni wspaniałomyślności krupiera.

Naszkicowane rozumowanie nosi nazwę **zasady odbicia** i ma ważne zastosowania w teorii prawdopodobieństwa.

Nawet w pozornie niesymetrycznej sytuacji można odnaleźć motywy oparte na symetrii. Dobrze ilustruje to następujące zadanie.

W probówce znajduje się dziesięć bakterii białych i dwadzieścia bakterii czarnych. Co minutę jedna z bakterii dzieli się na dwie o takim samym jak ona kolorze, przy czym wszystkie bakterie znajdujące się wówczas w probówce mają jednakowe szanse na podział. Po godzinie w naczyniu będzie 90 bakterii. Wylosujmy jedną z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie ona biała?

Dociekliwy Czytelnik może zastanowić się, jaka przestrzeń probabilistyczna odpowiada sytuacji opisanej w tym zadaniu i jak formalnie opisać jej symetrię wykorzystaną w rozwiązaniu. Nie jest to całkiem łatwe.

Załóżmy, że każda bakteria jest w nieco innym odcieniu (bieli lub czerni) i podczas podziału odcień koloru jest zachowywany. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana przez nas bakteria ma dany odcień, wynosi $\frac{1}{30}$ (wszystkie odcienie są „równouprawnione”). Ponieważ 10 spośród odcieni jest białych, szansa, iż wylosujemy białą bakterię, jest równa $\frac{1}{3}$.

Warto przypomnieć jeszcze jeden przykład świadczący o roli symetrii w rachunku prawdopodobieństwa. Maxwell, badając rozkład wektora prędkości cząsteczek gazu, zauważył, że rozkład ten powinien mieć symetrię obrotową (tzn. nie powinno go zmieniać obrócenie układu współrzędnych), a współrzędne tego wektora powinny być niezależnymi zmiennymi losowymi. Tu kończą się założenia wywodzące się z fizyki, a do akcji wkracza matematyka – okazuje się, że wektor losowy, spełniający powyższe dwa warunki, musi mieć rozkład gaussowski. Wynik ten, uzyskany na drodze czysto matematycznego rozumowania, podobno całkiem dobrze zgadza się z danymi doświadczalnymi.

Rozwiązanie zadania F 636.

Niech $R_z = 6400$ km oznacza promień Ziemi, $d = 1{,}5 \cdot 10^8$ km – odległość Ziemia–Słońce. Do Ziemi dociera z całego wypromieniowywanego przez Słońce promieniowania część określona przez stosunek

$$\frac{\pi R_z^2}{4\pi d^2},$$

więc pochłaniana w jednostce czasu energia to

$$P = L_s \frac{R_z^2}{4d^2}.$$

W pobliżu Ziemi promienie Słońca są praktycznie zupełnie równoległe, więc możemy przyjąć, że przynoszą w jednostce czasu pęd

$$F = \frac{L_s}{c}\frac{R_z^2}{4d^2}.$$

Po wstawieniu danych liczbowych dostajemy $F = 6,1 \cdot 10^8$ N, co jest bardzo małą wielkością w porównaniu z siłą przyciągania grawitacyjnego Ziemi przez Słońce.