

Zatem  $x \leq \lfloor r/2 \rfloor$ ,  $z \leq 9 - r$ , i oczywiście  $y \leq f(9-r)$ ; stąd

$$q \leq r + \lfloor r/2 \rfloor + f(9-r) + 9 - r.$$

Gdy  $r \geq 5$ , liczba po prawej stronie jest nie większa niż 15.

Dla  $r = 4$  wynosi ona 17. Dla  $r \leq 3$  mamy wcześniejszą nierówność  $q \leq 5r \leq 15$ .

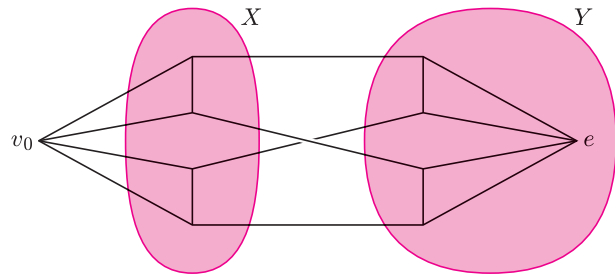
Zajmijmy się przypadkiem, gdy  $r = 4$ . Czy jest możliwe uzyskanie równości  $q = 17$ ? Oszacowania dla  $y$  oraz  $z$  musiałyby być równościami:

$$y = f(9-r) = f(5) = 6, \quad z = 9 - r = 5.$$

Zbiór  $Y$  (wraz z krawędziami łączącymi pary jego punktów) musiałby być wspomnianym na początku jedynym grafem pięciowierzchołkowym, realizującym równość  $f(5) = 6$ .

Ma on wierzchołek  $e$  stopnia 4. Skoro zaś  $r = 4$  jest maksymalnym stopniem wierzchołka w  $G$ , znaczy to, że z punktu  $e$  nie może wychodzić już żadna krawędź do punktów zbioru  $X$ . Każdy z pozostałych czterech punktów zbioru  $Y$  wysyła co najwyżej jedną krawędź do zbioru  $X$ , i mamy sprzeczność z równością  $z = 5$ .

To pokazuje, że  $q < 17$ . Równość  $q = 16$  da się uzyskać; przykład (przedstawiony na rysunku 1) nietrudno znaleźć, analizując poprzednie rozumowanie i zastępując postulowany układ równości  $y = 6$ ,  $z = 5$  przez  $y = 6$ ,  $z = 4$ . Stąd odpowiedź:  $f(10) = 16$ .



Rys. 1

**486.** Kładziemy ścianę  $BCD$  na płaszczyznę  $ABC$  (rys. 2); to znaczy, budujemy w tej płaszczyźnie (na zewnątrz trójkąta  $ABC$ ) trójkąt  $BCD'$  przystający do  $BCD$  ( $|BD'| = |BD|$ ,  $|CD'| = |CD|$ ). Z równości

$$|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - |\sphericalangle BD'C|$$

wynika, że czworokąt  $CABD'$  ma okrąg opisany. Zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza,

$$|BC| \cdot |AD'| = |AB| \cdot |CD'| + |AC| \cdot |BD'|,$$

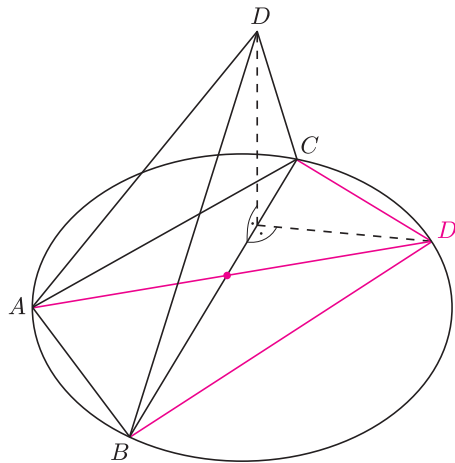
czyli

$$\frac{|AD'|}{|BD'| \cdot |CD'|} = \frac{|AB|}{|BC| \cdot |BD'|} + \frac{|AC|}{|BC| \cdot |CD'|}.$$

Teza zadania sprowadza się do wykazania, że na odcinku  $BC$  istnieje dokładnie jeden punkt  $P$ , dla którego zachodzi równość

$$|AD'| = |AP| + |PD'|;$$

a to oczywiście – jest to punkt przecięcia odcinków  $BC$  i  $AD'$ .



Rys. 2

## Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

**1.** Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

**2.** W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.

**3.** Konkurs składa się z eliminacji i finału.

**4.** W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje:

- adres prywatny autora,
- klasa, nazwa i adres szkoły;
- imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.

**5.** Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.

**6.** Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

**7.** Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.

**8.** Finałiści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.

**9.** Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.

**10.** Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu.

**11.** Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.

**12.** Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.

**13.** Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.