Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

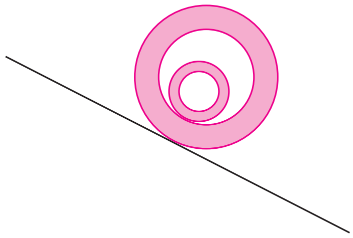
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2005

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 390, 391

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

390. Z równi pochyłej o kącie nachylenia α stacza się kula o masie M zawierająca współśrodkowe kuliste wydrążenie, przy czym stosunek wewnętrznego promienia do zewnętrznego (oznaczonego R) jest równy k, a poza wydrążeniem rozkład masy jest jednorodny. Wewnątrz kuli toczy się podobnie wydrążona kulka o masie m, zewnętrznym promieniu r i tej samej wartości k. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby środki kul i punkt zetknięcia większej z równią leżały stale na tej samej prostej (rys. 1)?

391. Jak długo mogłoby świecić Słońce z niezmienioną mocą, gdyby czerpało wypromieniowaną energię:

a) ze spalania węgla (załóżmy, że Słońce składa się z węgla i tlenu),

b) z grawitacyjnego zapadania się (załóżmy, że Słońce zmniejszyło swój promień o 10%)?

Niezbędne dane należy wziąć z tablic. Wystarczy przybliżona ocena wyniku.

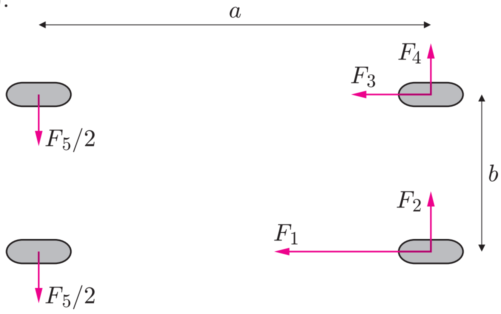
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2004

Przypominamy treść zadań:

382. Odległość między osiami przednich i tylnych kół samochodu jest równa 1,9 m, a odległość lewych kół od prawych – 1,5 m. Samochód ma napęd na 2 tylne koła, przy czym opona na jednym z tych dwóch kół jest „łysa” – współczynnik tarcia tego koła o podłoże jest równy 0,2, a dla pozostałych kół wynosi 0,8. Z jakim maksymalnym przyspieszeniem może ten samochód ruszyć po linii prostej bez poślizgu, jeśli wszystkie koła są wtedy jednakowo obciążone?

383. Do małego, izotropowego źródła światła Z przysunięto zestaw dwóch zwierciadeł płaskich. Ile razy zwierciadła zwiększają natężenie oświetlenia odległego ekranu, jeśli kąt α między nimi jest równy: a) $91°$, b) $90°$, c) $89°$? Rozważyć tylko część ekranu najbliższą źródła i przyjąć, że prosta przechodząca przez wierzchołek kąta i źródło jest prostopadła do ekranu.

382. Zauważmy najpierw, że siła wywierana przez podłoże na tylne opony nie może być skierowana wprost do przodu i jednocześnie osiągać wartości maksymalnych wynikających z wartości współczynników tarcia, gdyż wtedy nastąpiłby obrót lub boczny poślizg samochodu. Załóżmy więc, że siła działająca na „dobrą” oponę ma pewną składową podłużną F_1 oraz poprzeczną F_2, dla „złej” opony składowe te oznaczmy jako F_3 i F_4, natomiast siła F_5 działająca na przednie opony może być skierowana tylko poprzecznie do kierunku jazdy (rys. 2; symbol F_5 oznacza obie te siły łącznie).



Rys. 2

Spełnione są związki

- $F_2 + F_4 = F_5$ (brak przesunięcia bocznego)
- $2aF_5 = b(F_1 - F_3)$ (brak obrotu)
- $\sqrt{F_1^2 + F_2^2} \leqslant \mu_1 P$,
  $\sqrt{F_3^2 + F_4^2} \leqslant \mu_2 P$ (brak poślizgu tylnych opon)

gdzie P jest siłą nacisku na każdą z opon, a μ_1 i μ_2 są odpowiednimi współczynnikami tarcia. W granicznym przypadku maksymalnego możliwego przyspieszenia obie nierówności przechodzą w równości, co jednak pozostawia liczbę niewiadomych o 1 większą od liczby równań, czyli pozostaje jeden swobodny parametr. Zakładając, że układ napędowy sterowany jest przez odpowiednio zaprogramowany komputer (chodzi o odpowiednie dopasowanie F_1 i F_3), możemy przyjąć, iż suma $F_1 + F_3$ traktowana jako funkcja tego parametru osiąga wartość maksymalną. Analiza numeryczna wykazuje, że przy przyjętych danych liczbowych maksimum $F_1 + F_3$ wynosi $0{,}973 \cdot P$, a poszczególne siły osiągają wtedy wartości $F_1 = 0{,}777 \cdot P$, $F_2 = 0{,}189 \cdot P$, $F_3 = 0{,}196 \cdot P$, $F_4 = 0{,}040 \cdot P$, $F_5 = 0{,}229 \cdot P$. Masa samochodu jest równa $4P/\mathrm{g}$, zatem szukane maksymalne przyspieszenie wynosi

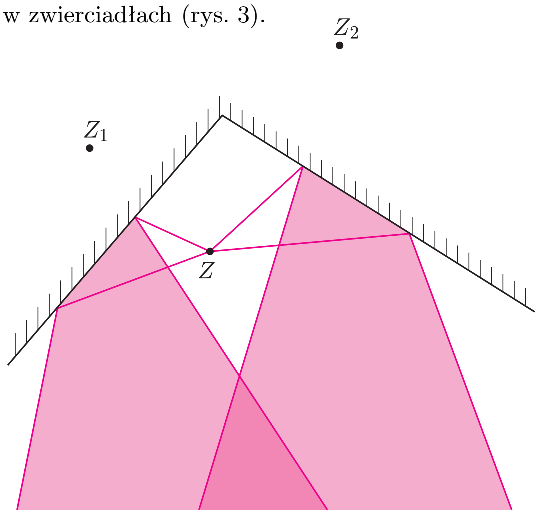
$$(0{,}973/4) \cdot \mathrm{g} = 0{,}243 \cdot \mathrm{g} = 2{,}39\ \mathrm{m/s^2}.$$

Zauważmy, że „brutalne” podstawienie

$$F_1 = \mu_1 P, \quad F_3 = \mu_2 P$$

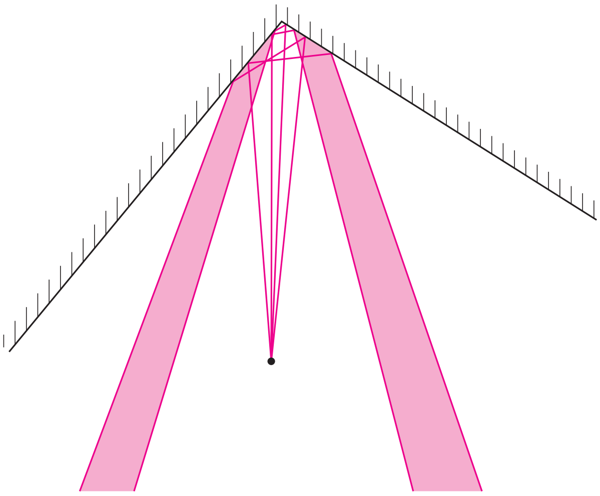
dałoby wynik $0{,}25 \cdot \mathrm{g}$, czyli o niecałe 3% za duży.

383. W przypadku a) natężenie oświetlenia ekranu zwiększy się trzykrotnie, gdyż na ekran padają dodatkowo wiązki odbite od każdego ze zwierciadeł, wybiegające pozornie z punktów Z_1 i Z_2, będących obrazami źródła Z w zwierciadłach (rys. 3).



Rys. 3

Promienie odbite dwukrotnie utworzą w tym przypadku dwie wiązki lekko rozbieżne, z których żadna nie oświetli najbliższej części ekranu (rys. 4).



Rys. 4

W przypadku b) wzmocnienie będzie czterokrotne, gdyż te dwie wiązki „zetkną się” ze sobą, tak jakby ekran oświetlało także źródło Z_3, położone w czwartym wierzchołku prostokąta $ZZ_1Z_2Z_3$.

W przypadku c) wiązki dwukrotnie odbite nałożą się na siebie, czyli na część ekranu najbliższą źródła padnie 5 wiązek.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2005

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
481 ($WT = 2{,}01$) i **482** ($WT = 1{,}24$)
z numeru 5/2004

Józef Siwy	– Łaziska Górne	43,54
Witold Bednarek	– Łódź	43,23
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	41,52
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	36,88
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	33,74

Zadania z matematyki nr 493, 494

Redaguje Marcin E. KUCZMA

493. Każda krawędź wielościanu wypukłego (o wszystkich kątach dwuściennych mniejszych od 180°) została pomalowana jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje wierzchołek A oraz płaszczyzna, przechodząca przez A i niezawierająca innych wierzchołków wielościanu, o tej własności, że po każdej jej stronie wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka A mają jednakowy kolor.

494. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \dfrac{\sqrt{13}-1}{6\sqrt{13}}\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n$.
Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\big(a_n - \lfloor a_n\rfloor\big)$.

Zadanie 494 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2004

Przypominamy treść zadań:

485. Obliczyć maksymalną liczbę krawędzi, jaką może mieć graf o 10 wierzchołkach, niezawierający czteroelementowego cyklu.

486. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - |\sphericalangle BDC|$. Udowodnić, że na krawędzi BC istnieje dokładnie jeden punkt P, dla którego zachodzi równość
$$\frac{|AP|}{|BD|\cdot|CD|} + \frac{|DP|}{|BD|\cdot|CD|} = \frac{|AB|}{|BC|\cdot|BD|} + \frac{|AC|}{|BC|\cdot|CD|}.$$

485. Niech $f(n)$ będzie maksymalną liczbą krawędzi grafu n-wierzchołkowego bez 4-cyklu. Mamy obliczyć $f(10)$. Łatwo sprawdzić, że $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, $f(5) = 6$; ostatnia z tych równości jest osiągana tylko w grafie o pięciu wierzchołkach a, b, c, d, e i sześciu krawędziach ab, cd, ae, be, ce, de.

Weźmy dowolny 10-wierzchołkowy graf G bez 4-cyklu, mający q krawędzi. Niech v_0 będzie wierzchołkiem maksymalnego stopnia, tj. o maksymalnej liczbie wychodzących z niego krawędzi; oznaczmy tę liczbę przez r. Jest jasne, że $q \leqslant \frac{1}{2}\cdot 10r = 5r$.

Niech X będzie zbiorem r wierzchołków połączonych krawędziami z v_0 i niech Y będzie zbiorem pozostałych $9-r$ wierzchołków (różnych od v_0). Tak więc $q = r + x + y + z$, gdzie

r = liczba krawędzi łączących v_0 z X,
x = liczba krawędzi łączących punkty zbioru X,
y = liczba krawędzi łączących punkty zbioru Y,
z = liczba krawędzi łączących X z Y.

Aby nie pojawił się 4-cykl, krawędzie łączące punkty zbioru X muszą być rozłączne, a z każdego punktu zbioru Y może wychodzić co najwyżej jedna krawędź do zbioru X.

Zatem $x \leqslant \lfloor r/2 \rfloor$, $z \leqslant 9 - r$, i oczywiście $y \leqslant f(9-r)$; stąd

$$q \leqslant r + \lfloor r/2 \rfloor + f(9-r) + 9 - r.$$

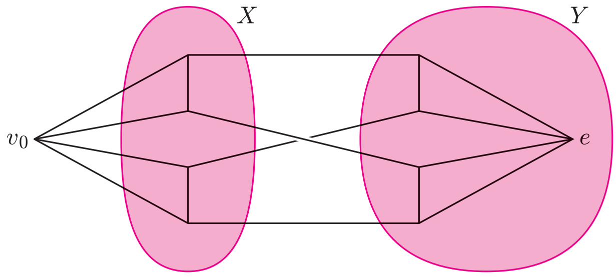
Gdy $r \geqslant 5$, liczba po prawej stronie jest niewiększa niż 15. Dla $r = 4$ wynosi ona 17. Dla $r \leqslant 3$ mamy wcześniejszą nierówność $q \leqslant 5r \leqslant 15$.

Zajmijmy się przypadkiem, gdy $r = 4$. Czy jest możliwe uzyskanie równości $q = 17$? Oszacowania dla y oraz z musiałyby być równościami:

$$y = f(9-r) = f(5) = 6, \qquad z = 9 - r = 5.$$

Zbiór Y (wraz z krawędziami łączącymi pary jego punktów) musiałby być wspomnianym na początku jedynym grafem pięciowierzchołkowym, realizującym równość $f(5) = 6$. Ma on wierzchołek e stopnia 4. Skoro zaś $r = 4$ jest maksymalnym stopniem wierzchołka w G, znaczy to, że z punktu e nie może wychodzić już żadna krawędź do punktów zbioru X. Każdy z pozostałych czterech punktów zbioru Y wysyła co najwyżej jedną krawędź do zbioru X, i mamy sprzeczność z równością $z = 5$.

To pokazuje, że $q < 17$. Równość $q = 16$ da się uzyskać; przykład (przedstawiony na rysunku 1) nietrudno znaleźć, analizując poprzednie rozumowanie i zastępując postulowany układ równości $y = 6$, $z = 5$ przez $y = 6$, $z = 4$. Stąd odpowiedź: $f(10) = 16$.



Rys. 1

486. Kładziemy ścianę BCD na płaszczyznę ABC (rys. 2); to znaczy, budujemy w tej płaszczyźnie (na zewnątrz trójkąta ABC) trójkąt BCD' przystający do BCD ($|BD'| = |BD|$, $|CD'| = |CD|$). Z równości

$$|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - |\sphericalangle BD'C|$$

wynika, że czworokąt $CABD'$ ma okrąg opisany. Zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza,

$$|BC| \cdot |AD'| = |AB| \cdot |CD'| + |AC| \cdot |BD'|,$$

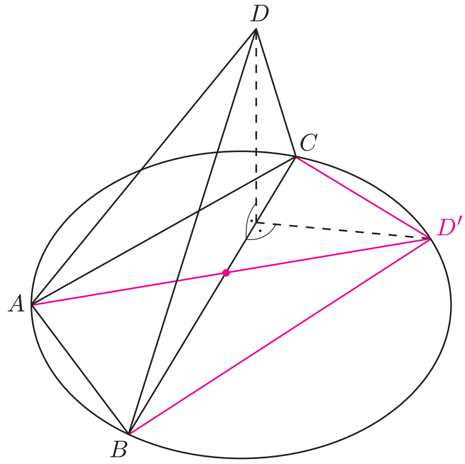
czyli

$$\frac{|AD'|}{|BD| \cdot |CD|} = \frac{|AB|}{|BC| \cdot |BD|} + \frac{|AC|}{|BC| \cdot |CD|}.$$

Teza zadania sprowadza się do wykazania, że na odcinku BC istnieje dokładnie jeden punkt P, dla którego zachodzi równość

$$|AD'| = |AP| + |PD'|;$$

a to oczywiste – jest to punkt przecięcia odcinków BC i AD'.



Rys. 2

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.

3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.

4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje:
- adres prywatny autora,
- klasa, nazwa i adres szkoły;
- imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.

5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.

6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.

8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.

9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.

10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu.

11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.

12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.

13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.