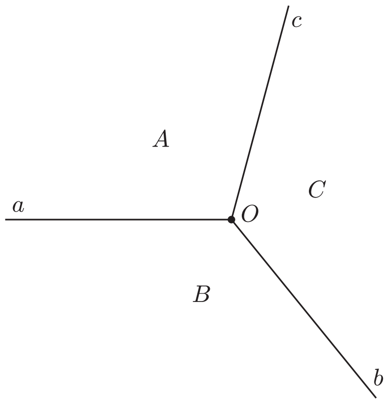
A jednak może być trójkąt!

Aleksander MATUSZOK

Może to niełladnie polemizować z tezami postawionymi w artykule opublikowanym w ramach *Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki*, jednak (z tego, co wiem) jego autor już dawno temu obronił pracę doktorską z matematyki, zatem – czemu nie?

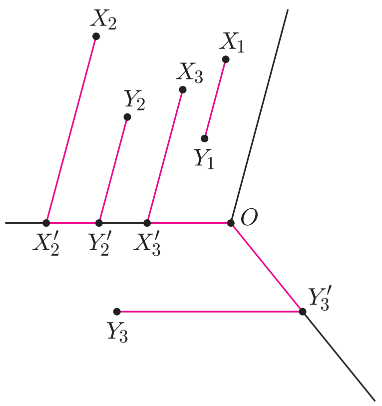


Rys. 1

W artykule poświęconym izometriom (*Izometrie przestrzeni metrycznych*, *Delta* 3/1988) Andrzej Żuk stwierdza na końcu:

Dziwactwem tego artykułu były kwadratowe okręgi – zapewne Czytelnik uwierzy (a może i sprawdzi), że istnieją metryki, w których okręgi są sześciokątami, ale, o dziwo, nie istnieje metryka, w której okręgi są trójkątami równobocznymi.

W odpowiedzi na to sformułowanie przedstawiam następujący pomysł. Pokazuje on, że istnieje metryka, w której przynajmniej jeden okrąg jest euklidesowym trójkątem, który – jeśli ktoś sobie tego życzy – może być równoboczny.
Co więcej, dla dowolnego $n > 2$ istnieją również metryki, w których przynajmniej jeden okrąg może być n-kątem, na życzenie foremnym.



Rys. 2

Weźmy pod uwagę trzy półproste a, b, c o wspólnym początku O, dzielące płaszczyznę na kąty wypukłe A, B, C (mniejsze od kąta półpełnego), jak na rysunku 1. Nie będę podawał formalnej definicji wyznaczonej przez tę figurę metryki – jak sądzę, przykładowe wyjaśnienie wystarczy (i każdy z Czytelników będzie je umiał w razie potrzeby uściślić).

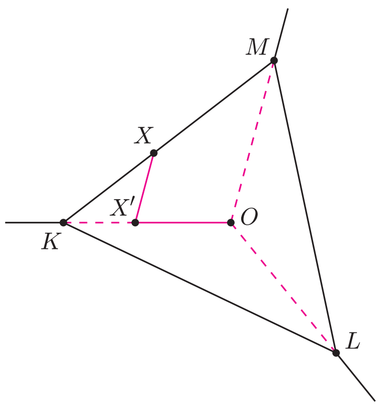
Odległość dwóch punktów X i Y leżących w części $A \cup a$ w przypadku, gdy przez te punkty przechodzi prosta równoległa do c, jest po prostu odległością euklidesową XY, a w przeciwnym przypadku jest równa

$$XX' + X'Y' + Y'Y,$$

gdzie X' (Y') jest rzutem X (Y) na a w kierunku c; gdy punkty leżą w różnych kątach, np. w A i B, to ich odległością jest

$$XX' + X'O + OY' + Y'Y$$

– tym razem Y' oznacza rzut Y na b w kierunku a (rys. 2).

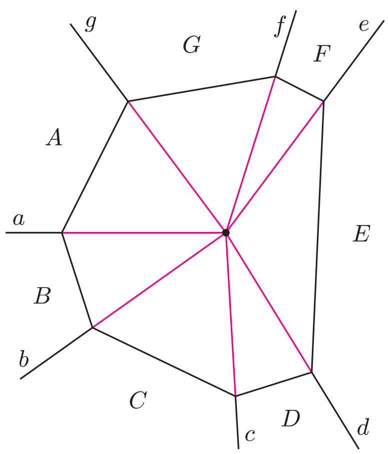


Rys. 3. $OK = OL = OM = OX' + X'X$.

Sprawdzenie, że to rzeczywiście odległość, czyli że

- ▷ odległość dwóch punktów jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy punkty te pokrywają się;
- ▷ odległość punktów nie zależy od ich kolejności;
- ▷ odległość P i Q nie przekracza sumy odległości P i R oraz R i Q, dla dowolnych punktów P, Q, R;

nie sprawia większego kłopotu, choć w przypadku ostatniego warunku rozpatrzeć trzeba cztery możliwości (wszystkie w jednym kącie, pierwszy i drugi w jednym, a trzeci w innym, pierwszy i trzeci w jednym, a drugi w innym, wreszcie każdy w innym) – pozostawię to Czytelnikom.



Rys. 4 Okrąg siedmiokątny.

A teraz trójkątny okrąg. Odkładamy na każdej z półprostych a, b, c od punktu O ten sam odcinek. Niech ich drugimi końcami będą K, L, M. Euklidesowy trójkąt KLM jest okręgiem o środku O, co doskonale widać na rysunku 3 (trójkąt $XX'K$ jest równoramienny). Obierając półproste a, b, c tak, aby każdy z kątów A, B, C miał $120°$, otrzymujemy oczywiście trójkąt równoboczny.

Jeżeli z punktu O będzie wychodziło n różnych półprostych, dzielących płaszczyznę na kąty wypukłe, to analogicznie zdefiniowana metryka da nam okrąg o środku w punkcie O będący n-kątem (rys. 4). Proponuję tę nową metrykę nazwać *metryką n-źródło*.