o ten sam kąt, ale w przeciwnym kierunku oraz stosując jednokładność o środku w punkcie A_{i+1} i o tej samej skali l. Obrazem odcinka $A_{i+2}A^i_{i+2}$ jest odcinek $O_{i+1}O_i$.

Przypomnijmy, że czworokąt $A_{i-1}A_{i+2}A^i_{i+2}A^i_{i-1}$ jest równoległobokiem, czyli odcinki $A_{i-1}A^i_{i-1}$ i $A_{i+2}A^i_{i+2}$ są równej długości i równoległe. Wiemy, że ich obrazami przy obrotach o kąty $\frac{\varphi}{2}$ w przeciwnych kierunkach, złożonych z zastosowaniem jednokładności o tej samej skali, są odcinki $O_{i-1}O_i$ oraz $O_{i+1}O_i$. Wobec tego $|O_{i-1}O_i| = |O_{i+1}O_i|$ oraz odpowiedni kąt między tymi odcinkami jest równy $2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi$. Są one zatem kolejnymi bokami n-kąta foremnego. To właśnie chcieliśmy wykazać.

Udowodnimy teraz implikację w drugą stronę.

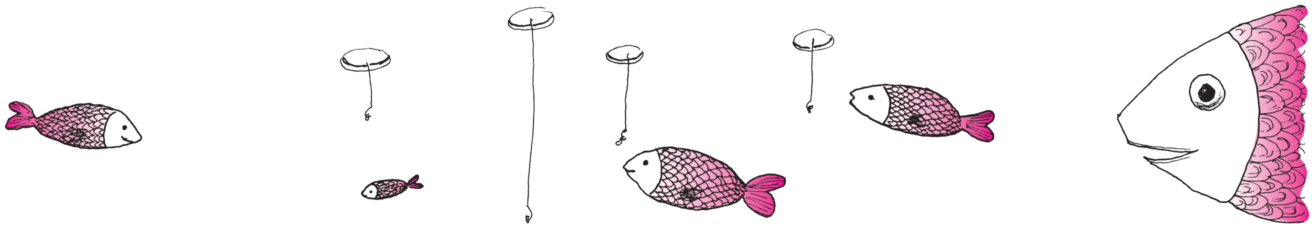
Załóżmy, że na bokach pewnego n-kąta zbudowano na zewnątrz n-kąty foremne, których kolejne środki tworzą n-kąt foremny. Wtedy, odwracając rozumowanie z powyższego dowodu, otrzymujemy wniosek, że dla każdego i odcinki A_iA_{i+1} i $A_{i-1}A_{i+2}$ są równoległe oraz

$$\frac{|A_iA_{i+1}|}{|A_{i-1}A_{i+2}|} = k.$$

Weźmy przekształcenie afiniczne przeprowadzające wierzchołki A_1, A_2, A_3 naszego n-kąta na kolejne wierzchołki pewnego n-kąta foremnego W.

Dla dowolnych dwóch trójkątów istnieje przekształcenie afiniczne przeprowadzające jeden z nich na drugi.

To przekształcenie ma miłą własność: obrazem punktu A_4 jest „następny” wierzchołek n-kąta W (bo obrazem odcinka A_1A_4 jest odcinek równoległy do A_2A_3 i o odpowiedniej długości). Podobnie obrazami punktów $A_5, \ldots, A_n$ są kolejne wierzchołki n-kąta foremnego W, zatem wyjściowy n-kąt jest z nim afinicznie równoważny. To kończy dowód drugiej implikacji i całego twierdzenia.

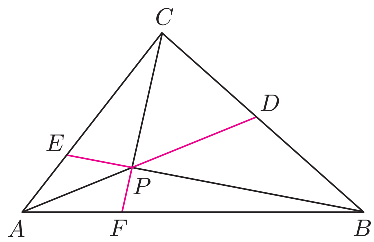


Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1081. Liczby 2^{2004} oraz 5^{2004} zapisano w układzie dziesiętnym, jedna za drugą, otrzymując jedną liczbę. Z ilu cyfr składa się powstała liczba?
Rozwiązanie na str. 4

M 1082. (Erdős) Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, którego najdłuższy bok ma długość d. Proste AP, BP, CP przecinają odpowiednio boki BC, CA, AB w punktach D, E, F (rys. 1). Wykazać, że $PD + PE + PF < d$.
Rozwiązanie na str. 13

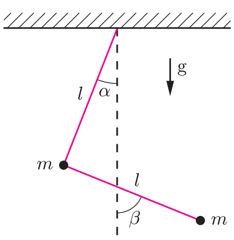


Rys. 1

M 1083. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej n największy wspólny dzielnik liczb $n^2 + 1$ oraz $(n+1)^2 + 1$ jest równy 1 lub 5.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

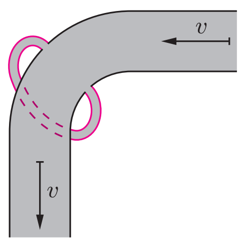
F 633. Dwie kulki o masie m umocowane są na nieważkiej i nierozciągliwej nitce.



Rys. 2

Układ wprowadzamy w ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową jak na rysunku. Dany jest kąt α, prędkość kątowa ω i długość l. Obliczyć kąt β.
Rozwiązanie na str. 16

F 634. Rura o przekroju kołowym zakręca pod kątem prostym.



Rys. 3

Przez rurę puszczamy wodę z dużą prędkością. Jednocześnie w miejscu zagięcia łączymy małą rurką wewnętrzną i zewnętrzną ścianę rury (rys. 3). Czy woda będzie (sama) płynąć przez rurkę? Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 12