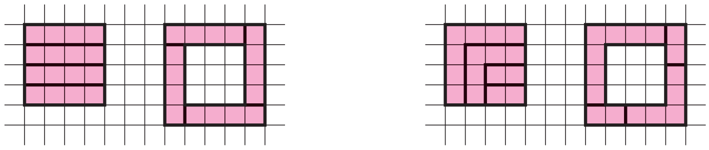
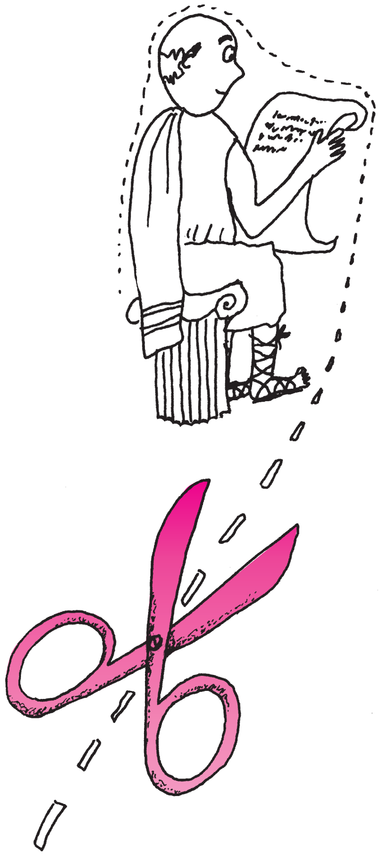
Z nożyczkami na Pitagorasa

Ponieważ $5^2 = 4^2 + 3^2$, więc jeśli na środku kwadratu A o boku 5 wytniemy kwadrat B o boku 3, to C – to, co zostanie, będzie miało pole równe polu kwadratu D o boku 4. Można więc kwadrat D pociąć na kawałki, z których ułoży się figurę C. Jaka jest najmniejsza liczba części, które pozwalają to wykonać?

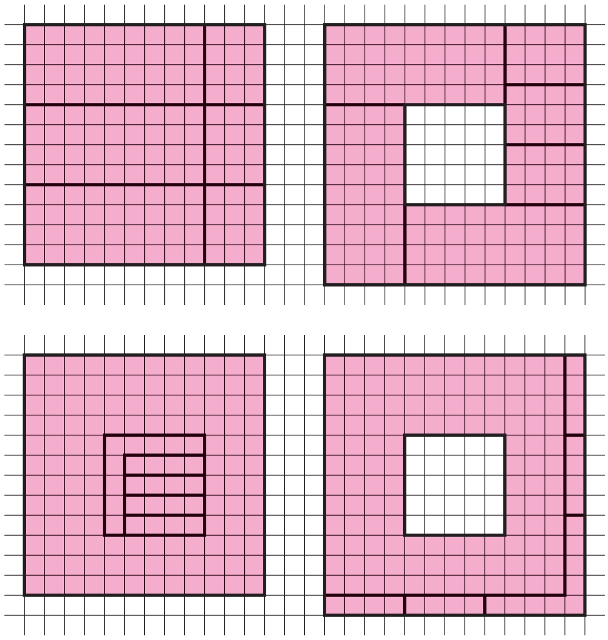
Nie wiem, ale wydaje mi się, że cztery. Na cztery odpowiednie części umiem pociąć D nawet na różne sposoby. Oto dwa z nich.





Ale jak zręcznie przeprowadzić dowód, że trzy części nie wystarczą?

Oczywiście, mamy również $13^2 = 12^2 + 5^2$, a więc dla liczb 13, 12 i 5 możemy postawić podobne pytanie. Tu najmniejsza liczba części, przy której umiem zrealizować odpowiednie pocięcie, jest równa sześć. Umiem to zrobić też na wiele sposobów. Poniżej znów prezentuję dwa.



Ale słyszałem, że można wykonać to za pomocą czterech części. Może któryś z Czytelników potrafi? Podobnie chętnie wydrukujemy dowód, że jakaś liczba jest najmniejszą liczbą części, dla której podzielenie kwadratu tak, aby dał się z tego ułożyć „pierścień kwadratowy”, jest możliwe.

Ciekaw też jestem, jak wygląda sytuacja dla innych pitagorejskich trójek liczb, czyli liczb całkowitych dodatnich a, b, c, spełniających równość $c^2 = b^2 + a^2$. „Kolejna” taka trójka to 17, 15 i 8. Trzeba by zatem pociąć kwadrat o boku 8 na części, z których da się ułożyć kwadrat o boku 17 z wyciętym na środku kwadratem o boku 15 (tutaj od razu widzę pocięcie na osiem części, ale czy można mniej?).

Dla tych, którzy chcieliby sięgać do jeszcze innych trójek pitagorejskich, przypominam, że wszystkie trójki można uzyskać, biorąc dowolne liczby całkowite dodatnie d, m, n, przy czym ma być $m > n$, i podstawiając

$$c = d(m^2 + n^2), \qquad b = 2dmn, \qquad a = d(m^2 - n^2).$$

Otrzymamy wtedy każdą trójkę, ale niektóre wielokrotnie, np. dla $d = 1$, $m = 3$, $n = 1$ i dla $d = 2$, $m = 2$, $n = 1$ otrzymujemy te same liczby, choć w różnym porządku. Liczby te zresztą pokazują drugą wadę wskazanej tu ogólnej recepty na liczby pitagorejskie: trójka (10, 8, 6) z punktu widzenia naszego zadania nie różni się istotnie od trójki (5, 4, 3).

Uwaga: podane wzory będą dawały każdy trójkąt jeden raz, gdy m i n nie będą miały wspólnego dzielnika większego od 1 i jedna z nich będzie parzysta.

Marek KORDOS