Twierdzenie Napoleona – uogólnienie

Joanna JASZUŃSKA

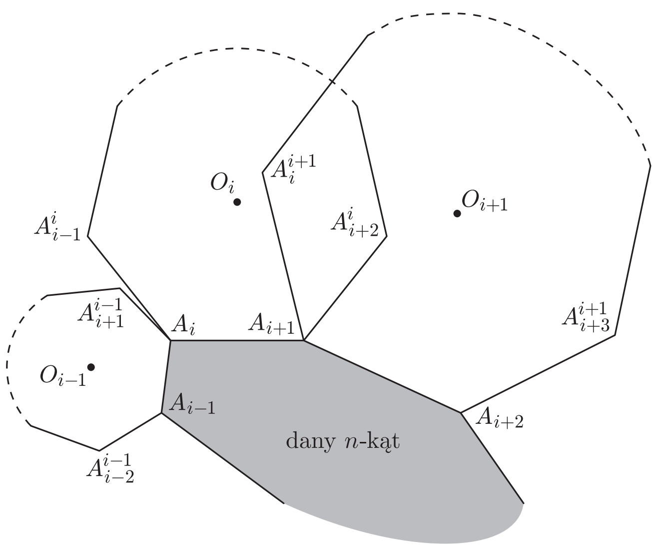
W *Delcie* nr 361 (z czerwca 2004 r.), w artykule *Twierdzenie Napoleona*, sformułowano bez dowodu następujące uogólnienie tytułowego faktu.

Twierdzenie. *Środki n-kątów foremnych zbudowanych na kolejnych bokach pewnego n-kąta W (wszystkie do wewnątrz lub wszystkie na zewnątrz) są kolejnymi wierzchołkami n-kąta foremnego wtedy i tylko wtedy, gdy n-kąt W jest afinicznie foremny.*

Przekształcenia afiniczne zachowują proste, równoległość i stosunki długości odcinków równoległych. Wielokąt *afinicznie foremny* to taki, który jest obrazem wielokąta foremnego w jakimś przekształceniu afinicznym.

Oto **geometryczny dowód** (wersja zewnętrzna, w wersji wewnętrznej i dla wielokątów zdegenerowanych dowód jest analogiczny).

Udowodnimy najpierw implikację w jedną stronę. Niech dany będzie n-kąt afinicznie foremny o wierzchołkach $A_1A_2\ldots A_n$. Na każdym boku A_iA_{i+1} budujemy n-kąt foremny o środku O_i i wierzchołkach $A^i_1A^i_2\ldots A^i_{i-1}A_iA_{i+1}A^i_{i+2}\ldots A^i_n$ (wszystkie indeksy zapisujemy zawsze modulo n). Wykażemy, że tak zbudowany n-kąt $O_1\ldots O_n$ jest foremny.



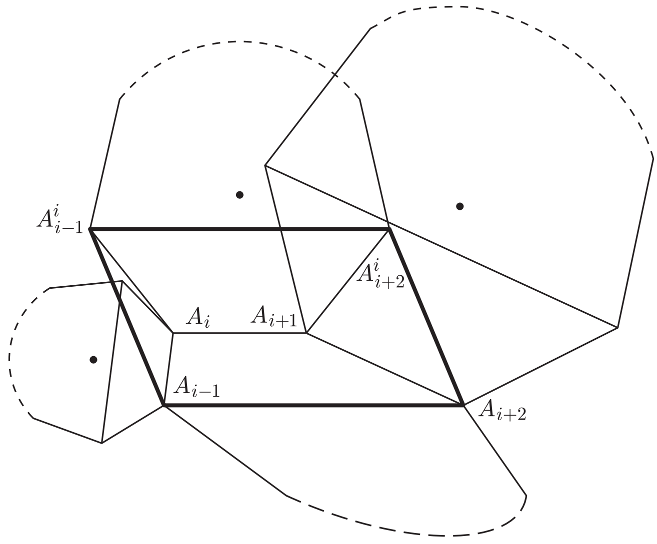
Rys. 1

Oznaczmy przez k stosunek długości boku n-kąta foremnego do długości najbliższej równoległej do niego przekątnej (w przypadku $n=4$ przyjmujemy za tę „przekątną" przeciwległy bok, dla $n=3$ stałej k nie definiujemy).

Z przypomnianych na początku własności przekształceń afinicznych wynika, że w naszym n-kącie dla dowolnego i bok A_iA_{i+1} jest równoległy do odcinka $A_{i-1}A_{i+2}$ oraz zachodzi

$$\frac{|A_iA_{i+1}|}{|A_{i-1}A_{i+2}|}=k.$$

Stąd dla każdego i czworokąt $A_{i-1}A_{i+2}A^i_{i+2}A^i_{i-1}$ jest równoległobokiem (dla $n=3$ równoległobok ten jest zdegenerowany do odcinka, bo $i-1=i+2 \pmod 3$).

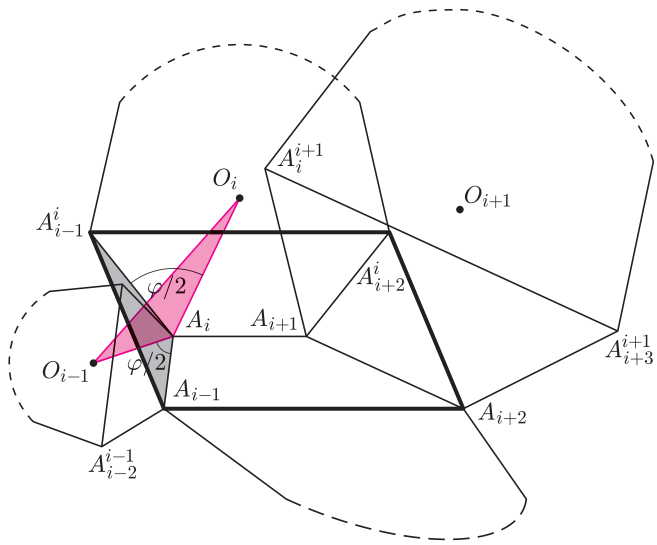


Rys. 2

Aby wykazać, że n-kąt $O_1O_2\ldots O_n$ jest foremny, wystarczy udowodnić, że dla dowolnego i odcinki $O_{i-1}O_i$ i O_iO_{i+1} są równej długości oraz tworzą odpowiedni kąt φ (gdzie $\varphi=\frac{n-2}{n}\pi$ jest kątem wewnętrznym n-kąta foremnego).

Przekształcamy trójkąt $A_iA_{i-1}A^i_{i-1}$ na trójkąt $A_iO_{i-1}O_i$ „kręcąc i zmieniając rozmiar" w następujący sposób:

1. obracamy wokół punktu A_i o kąt $\frac{\varphi}{2}$, przy sytuacji jak na rys. 3 – zegarowo,
2. stosujemy jednokładność o środku w punkcie A_i i o skali l równej stosunkowi długości odcinka łączącego wierzchołek ze środkiem n-kąta foremnego do długości jego boku.



Rys. 3

Obrazem odcinka $A_{i-1}A^i_{i-1}$ jest wtedy odcinek $O_{i-1}O_i$.

Analogicznie przekształcamy trójkąt $A_{i+1}A_{i+2}A^i_{i+2}$ na trójkąt $A_{i+1}O_{i+1}O_i$, obracając wokół punktu A_{i+1}

o ten sam kąt, ale w przeciwnym kierunku oraz stosując jednokładność o środku w punkcie A_{i+1} i o tej samej skali l. Obrazem odcinka $A_{i+2}A_{i+2}^i$ jest odcinek $O_{i+1}O_i$.

Przypomnijmy, że czworokąt $A_{i-1}A_{i+2}A_{i+2}^iA_{i-1}^i$ jest równoległobokiem, czyli odcinki $A_{i-1}A_{i-1}^i$ i $A_{i+2}A_{i+2}^i$ są równej długości i równoległe. Wiemy, że ich obrazami przy obrotach o kąty $\frac{\varphi}{2}$ w przeciwnych kierunkach, złożonych z zastosowaniem jednokładności o tej samej skali, są odcinki $O_{i-1}O_i$ oraz $O_{i+1}O_i$. Wobec tego $|O_{i-1}O_i| = |O_{i+1}O_i|$ oraz odpowiedni kąt między tymi odcinkami jest równy $2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi$. Są one zatem kolejnymi bokami n-kąta foremnego. To właśnie chcieliśmy wykazać.

Udowodnimy teraz implikację w drugą stronę.

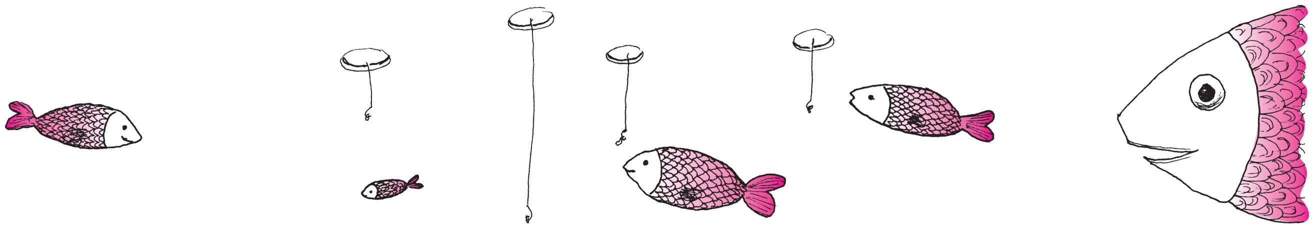
Załóżmy, że na bokach pewnego n-kąta zbudowano na zewnątrz n-kąty foremne, których kolejne środki tworzą n-kąt foremny. Wtedy, odwracając rozumowanie z powyższego dowodu, otrzymujemy wniosek, że dla każdego i odcinki A_iA_{i+1} i $A_{i-1}A_{i+2}$ są równoległe oraz

$$\frac{|A_iA_{i+1}|}{|A_{i-1}A_{i+2}|} = k.$$

Weźmy przekształcenie afiniczne przeprowadzające wierzchołki A_1, A_2, A_3 naszego n-kąta na kolejne wierzchołki pewnego n-kąta foremnego W.

Dla dowolnych dwóch trójkątów istnieje przekształcenie afiniczne przeprowadzające jeden z nich na drugi.

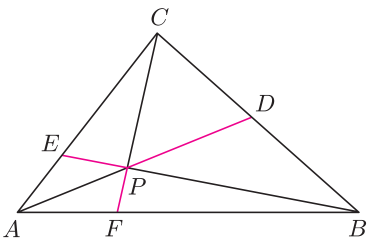
To przekształcenie ma miłą własność: obrazem punktu A_4 jest „następny" wierzchołek n-kąta W (bo obrazem odcinka A_1A_4 jest odcinek równoległy do A_2A_3 i o odpowiedniej długości). Podobnie obrazami punktów $A_5, \ldots, A_n$ są kolejne wierzchołki n-kąta foremnego W, zatem wyjściowy n-kąt jest z nim afinicznie równoważny. To kończy dowód drugiej implikacji i całego twierdzenia.



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1081. Liczby 2^{2004} oraz 5^{2004} zapisano w układzie dziesiętnym, jedna za drugą, otrzymując jedną liczbę. Z ilu cyfr składa się powstała liczba?
Rozwiązanie na str. 4



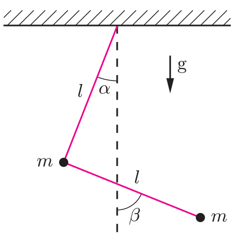
Rys. 1

M 1082. (Erdős) Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, którego najdłuższy bok ma długość d. Proste AP, BP, CP przecinają odpowiednio boki BC, CA, AB w punktach D, E, F (rys. 1). Wykazać, że $PD + PE + PF < d$.
Rozwiązanie na str. 13

M 1083. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej n największy wspólny dzielnik liczb $n^2 + 1$ oraz $(n + 1)^2 + 1$ jest równy 1 lub 5.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

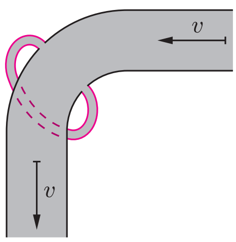
F 633. Dwie kulki o masie m umocowane są na nieważkiej i nierozciągliwej nitce.



Rys. 2

Układ wprowadzamy w ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową jak na rysunku. Dany jest kąt α, prędkość kątowa ω i długość l. Obliczyć kąt β.
Rozwiązanie na str. 16

F 634. Rura o przekroju kołowym zakręca pod kątem prostym.



Rys. 3

Przez rurę puszczamy wodę z dużą prędkością. Jednocześnie w miejscu zagięcia łączymy małą rurką wewnętrzną i zewnętrzną ścianę rury (rys. 3). Czy woda będzie (sama) płynąć przez rurkę? Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 12