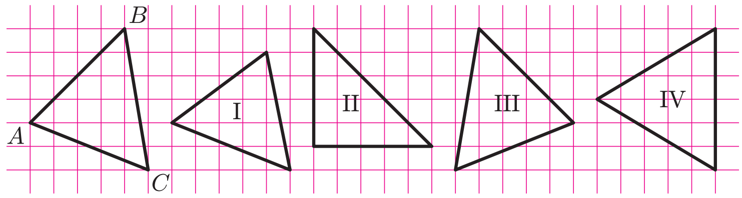
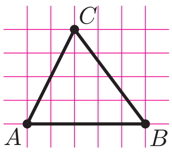
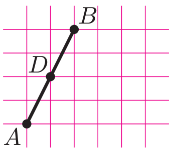
Równanie Pitagorasa

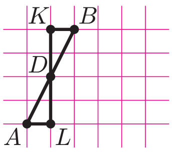
Pomysł tego artykułu powstał na lekcji matematyki w I klasie gimnazjum. Rozwiązywałem z uczniami zadanie 3 (str. 85) z podręcznika wydanego przez Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe: który z narysowanych trójkątów jest przystający do trójkąta ABC?

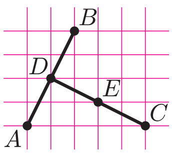


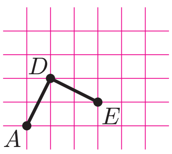
Odpowiedź, że trójkąt III, była oczywista. Trochę mniej oczywiste było to, że pozostałe trójkąty nie są przystające. Wtedy zadałem sobie pytanie: jak bez twierdzenia Pitagorasa (a jeszcze go nie było!) przekonać moich uczniów, że jakieś odcinki narysowane na papierze w kratkę są lub nie są równe? Weźmy najprostszy przykład. Jak pokazać, że przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 3 i 4 ma długość 5? Inaczej mówiąc, jak pokazać, że trójkąt ABC na rysunku obok jest równoramienny? Okazało się to dość łatwe. Potrzebne były trzy rysunki pomocnicze. Z lewej strony mamy pierwszy z nich. Jak pokazać, że punkty A, D i B są współliniowe? Uczniowie szybko dostrzegli przystające trójkąty ADL i BDK (rys. z prawej strony). Zatem kąty ADL i BDK są równe, więc z twierdzenia o kątach wierzchołkowych (nikt nie zawracał tu sobie głowy czymś takim, jak twierdzenie odwrotne...) wynika, że punkty A, D i B są współliniowe. A więc punkty D, E i C na następnym rysunku też są współliniowe. Potrzebny był jeszcze kąt ADE. Narysowałem trzeci rysunek i zapytałem, jak dowieść, że kąt ADE jest prosty? Uczniowie zaproponowali kilka rozwiązań. Najprostsze z nich polegało na zauważeniu, że trójkąty ADL i EDM są przystające, zatem „to, co z kąta prostego zabraliśmy kątem EDM, oddaliśmy z powrotem kątem ADL". Mogliśmy teraz powrócić do pierwszego rysunku, na którym dorysowaliśmy odcinek CD. Uczniowie już natychmiast dostrzegli, że trójkąty ADC i BDC są przystające, więc $AC = BC$.

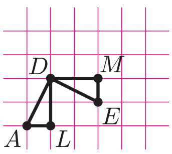


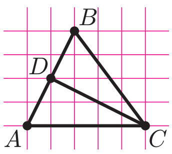












Niektórzy uczniowie byli nieco zdziwieni tym, że taki odcinek „ukośny" okazał się być równy „prostemu" (tzn. poziomemu). Trochę mnie zastanowiła pełna zdegustowania mina jednej uczennicy, zdająca się mówić: i po co to wszystko? Zrozumiałem po najbliższej klasówce, na której dałem zadanie podobne z trójkątem o przyprostokątnych 5 i 12. Rozwiązanie tej uczennicy było krótkie:

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2, \text{ c. b. d. o.}$$

Te proste dowody geometryczne nie odwołujące się do twierdzenia Pitagorasa, skłoniły mnie do zastanowienia się nad geometrycznym rozwiązaniem równania Pitagorasa w liczbach całkowitych. Przedstawię teraz to rozwiązanie. Mamy więc równanie

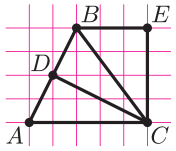
$$x^2 + y^2 = z^2$$

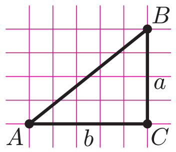
i zakładamy, że x, y i z są całkowite. Łatwo pokazujemy, że co najmniej jedna z liczb x i y jest parzysta. Gdyby bowiem

$$x = 2k + 1 \quad \text{i} \quad y = 2l + 1,$$

to

$$z^2 = (2k+1)^2 + (2l+1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2,$$

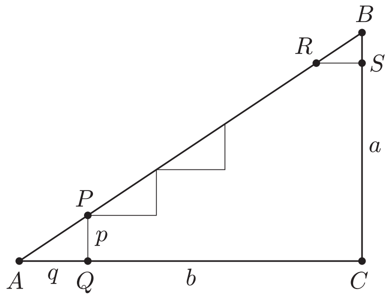




więc liczba z^2 byłaby parzysta i niepodzielna przez 4, co jest niemożliwe. Załóżmy zatem, że liczba y jest parzysta. Zauważmy, że wtedy liczby x i z są tej samej parzystości. Narysujmy teraz trójkąt prostokątny BCE o bokach x, y i z na papierze kratkowanym tak jak na rysunku obok. Wierzchołki A, B, C i E leżą w punktach kratowych, przy czym:

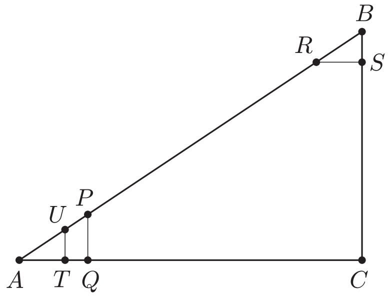
$$BE = x, \quad CE = y, \quad BC = AC = z.$$

Ponieważ liczby y i $z - x$ są parzyste, więc środek D odcinka AB też leży w punkcie kratowym. Zastanówmy się teraz, jakie punkty kratowe mogą leżeć na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego położonego w taki sposób, że przyprostokątne leżą na liniach tworzących kratki.

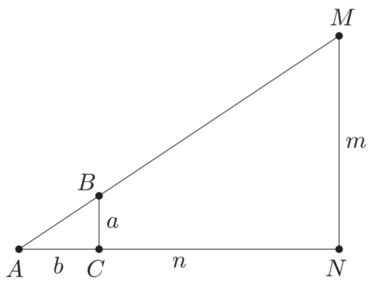


Lemat 1. Jeśli w trójkącie ABC, takim jak na rysunku obok, $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$, gdzie $BC = a$ i $AC = b$, to jedynymi punktami kratowymi leżącymi na przeciwprostokątnej AB są jej końce A i B.

Dowód lematu wynika dość łatwo z twierdzenia Talesa, ale poradzimy sobie bez niego.



Dowód. Przypuśćmy, że na przeciwprostokątnej leżą inne punkty kratowe i niech P będzie takim punktem leżącym najbliżej wierzchołka A. Niech Q będzie rzutem punktu P na bok AC. Niech $p = PQ$ i $q = AQ$. Odłóżmy następnie odcinek AP w odcinku AB tyle razy, ile się da. Niech punkt R będzie ostatnim z otrzymanych tak punktów przed wierzchołkiem B. Niech wreszcie punkt S będzie rzutem punktu R na bok BC. Podobnie jak na lekcji w gimnazjum pokazujemy, że wszystkie punkty na przeciwprostokątnej, otrzymane w wyniku odkładania odcinka AP, są kratowe. W szczególności punkty R i S są kratowe. Przypuśćmy najpierw, że $RS < AQ$. Weźmy taki punkt T na odcinku AQ taki, że $AT = RS$ i weźmy punkt U przeciwprostokątnej, że $UT \perp AT$. Oczywiście trójkąty ATU i RSB są przystające, więc $TU = SB$, skąd wynika, że punkt U jest punktem kratowym, co przeczy wyborowi punktu P. Zatem $RS = AQ$, czyli odcinek AP został odłożony w odcinku AB całkowitą liczbę razy, powiedzmy d razy. Oczywiście $d \geqslant 2$. Wtedy $a = dp$ i $b = dq$, co przeczy temu, że liczby a i b są względnie pierwsze.

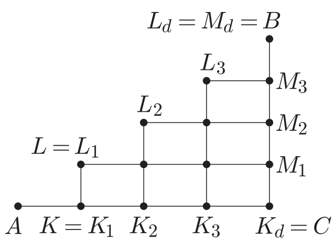


Wniosek. Jeśli $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$, punkt M leży na półprostej AB, N jest rzutem punktu M na prostą AC, $MN = m$ oraz $AN = n$, to istnieje liczba całkowita d taka, że $m = ad$ i $n = bd$.

Lemat 2. Zachowajmy oznaczenia z lematu 1. Jeśli a i b mają wspólny dzielnik większy od 1, to na przeciwprostokątnej AB istnieją inne punkty kratowe poza jej końcami.

Dowód. Niech $a = dk$ i $b = dl$. Narysujmy trójkąt prostokątny AKL o przyprostokątnych k i l, a następnie odłóżmy d razy odcinek AK w odcinku AC i d razy odcinek KL w odcinku CB, otrzymując punkty

$$K_1 = K, K_2, \ldots, K_d = C \quad \text{oraz} \quad M_1, M_2, \ldots, M_d = B.$$



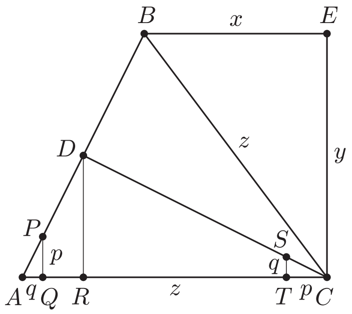
Niech następnie punkt kratowy L_i (dla $i = 1, 2, \ldots, d$) będzie punktem, którego rzutami na proste AC i BC są odpowiednio punkty K_i oraz M_i.

Pokazujemy, że punkty

$$A, L_1, L_2, \ldots, L_d = B$$

są współliniowe, a więc punkty L_i dla $i = 1, \ldots, d-1$ leżą na przeciwprostokątnej AB.

Powróćmy do naszego trójkąta prostokątnego o bokach długości x, y i z. Niech P będzie punktem kratowym leżącym na odcinku AD najbliżej punktu A, a Q jego rzutem na AC.



Niech następnie $PQ = p$ i $AQ = q$. Z lematu 2 wynika, że $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$. Z wniosku wynika, że istnieje liczba całkowita d taka, że

$$AR = \frac{z-x}{2} = dq \quad \text{oraz} \quad DR = \frac{y}{2} = dp,$$

gdzie R jest rzutem D na AC. Odłóżmy następnie odcinek $CT = p$ na półprostej CA i niech S będzie takim punktem półprostej CD, że $TS \perp CT$. Ponieważ $CD \perp AD$, więc kąty TCS i QAP są równe, a zatem trójkąty CTS i PQA są przystające. Stąd wynika, że $ST = q$, więc punkt S jest punktem kratowym. Z lematu 1 wynika, że istnieje liczba całkowita e taka, że

$$CR = z - \frac{z-x}{2} = \frac{z+x}{2} = ep \quad \text{oraz} \quad DR = \frac{y}{2} = eq.$$

Zatem

$$\frac{y}{2} = dp = eq,$$

skąd wynika, że q jest dzielnikiem dp. Ponieważ liczby p i q są względnie pierwsze, więc q jest dzielnikiem d. Istnieje więc liczba całkowita t taka, że $qt = d$. Mamy teraz

$$eq = dp = qtp,$$

czyli $e = tp$. Zatem

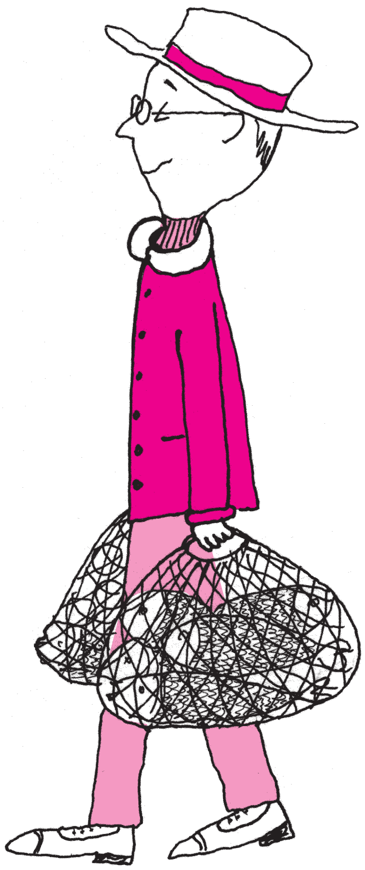
$$\frac{z-x}{2} = dq = tq^2,$$

$$\frac{z+x}{2} = ep = tp^2,$$

$$\frac{y}{2} = dp = tpq,$$

skąd ostatecznie dostajemy

$$(*) \qquad x = t(p^2 - q^2), \qquad y = 2tpq, \qquad z = t(p^2 + q^2).$$



Dla każdego rozwiązania (x, y, z) równania

$$x^2 + y^2 = z^2$$

istnieją liczby całkowite t, p i q takie, że spełnione są równości $(*)$. Z drugiej strony, łatwo sprawdzić, że jeśli x, y i z są określone wzorami $(*)$, to spełniają równanie Pitagorasa.

Wojciech GUZICKI