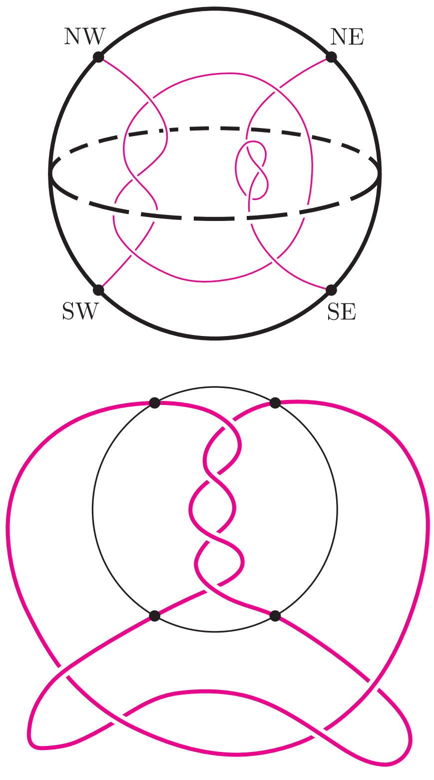
Arytmetyka supełków

Agnieszka JANIAK-OSAJCA
Zdzisław POGODA

W potocznym rozumieniu słowa „węzeł” i „supeł” są synonimami i kojarzą się z zaplątanym sznurkiem. W matematyce oba pojęcia są blisko ze sobą związane, jednak nie są identyczne. Spróbujmy bliżej przyjrzeć się supłom, tym bardziej że niektóre z nich mają ciekawą interpretację oraz zaskakujące zastosowania.

Przypomnijmy najpierw, że węzeł to homeomorficzny obraz okręgu w przestrzeni. Węzły otrzymujemy więc poprzez umieszczenie okręgu w przestrzeni na różne sposoby. Używając interpretacji sznurkowej: węzeł powstaje, gdy kawałek sznurka zapleciemy w dowolny sposób, a następnie skleimy jego końce. Kilka węzłów tworzy **splot**, a poszczególne węzły nazywane są jego **ogniwami**. Sam węzeł zatem jest szczególnym przypadkiem splotu.

Supeł natomiast można przedstawić jako dwa zaplecione kawałki sznurka. Umieszcza się je zazwyczaj w sferze tak, że końce leżą na jednym z wielkich okręgów na powierzchni sfery. Końce te oznacza się jak w kompasie NE, SE, SW, NW.

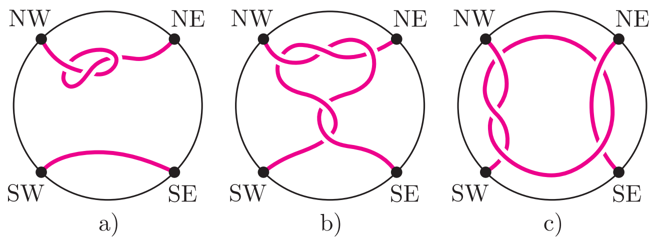


Rys. 1. Przedstawienie supła w sferze i w węźle.

Supły można traktować jak cegiełki, z których buduje się węzły. Dlatego znajomość własności supłów może być pomocna przy studiowaniu węzłów. Pomysł badania supłów pochodzi od Johna Conwaya. Podał on ciekawy sposób charakteryzacji pewnej rodziny supłów nazywanych supłami wymiernymi.

Generalnie wyróżniamy trzy rodziny supłów:

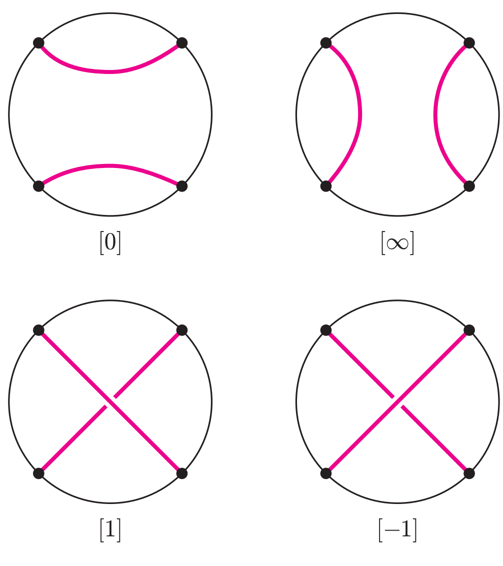
- **lokalnie zawęźlone** – gdy przynajmniej jeden ze sznurków jest lokalnie zawęźlony (rys. a),
- **supły wymierne** powstałe przez skończoną liczbę skręceń dwóch sąsiednich końców (rys. b) oraz
- pozostałe, nazywane czasem **prostymi** (rys. c).



Kiedy dwa supły uznamy za identyczne? Ogólniej, dwa sploty uznaje się za identyczne albo równoważne, gdy jeden z drugiego można otrzymać za pomocą odpowiednich deformacji okręgów w przestrzeni, bez ich rozrywania i sklejania. Należy tak rozplatać sznurek, żeby z jednego splotu (węzła) otrzymać drugi. Podobnie definiujemy równoważność supłów, zakładamy tylko dodatkowo, że nie wolno ruszać końców.

Jednym z najważniejszych problemów w teorii węzłów jest ich klasyfikacja. Istnieje wiele wymyślnych i skomplikowanych sposobów pozwalających badać węzły oraz sploty i stwierdzić, czy są równoważne, czy też nie. Zamiast badać same węzły i sploty, rozważa się ich diagramy, czyli odpowiednio regularne rzuty na płaszczyznę. Równoważność węzłów można zastąpić równoważnością ich diagramów. Analogicznie, w przypadku supłów wygodniej jest rozważać ich diagramy – tu rzutujemy na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny okręgu wielkiego, na którym umieszczone są końce supła.

Najprostsze są następujące supły, które będziemy oznaczać odpowiednio $[0]$, $[\infty]$, $[1]$ i $[-1]$. Pierwsze dwa z nich to tzw. supły trywialne.

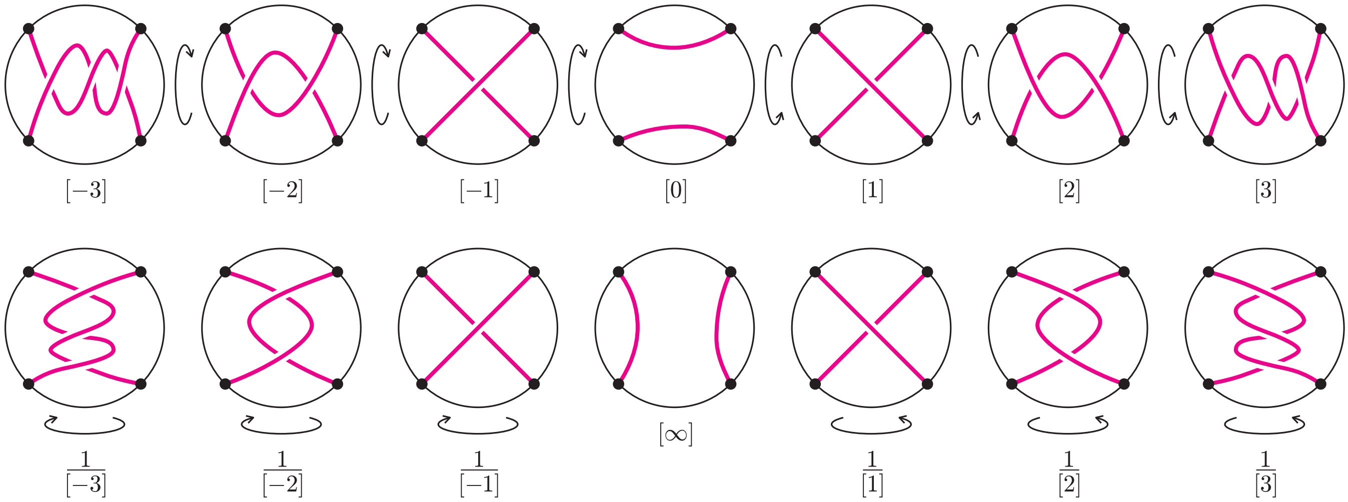


Rys. 3. Supły wyróżnione.

Supeł oznaczony symbolem [1] (skrzyżowanie typu „most”) powstaje z supła [0] przez dodatni (tj. prawoskrętny) obrót o 180 stopni końców NE i SE, a supeł [−1] (skrzyżowanie typu „tunel”) przez obrót w przeciwnym kierunku. I ogólniej: supeł $[n]$, gdzie n jest liczbą całkowitą, otrzymamy przez n-krotny odpowiedni obrót końców NE i SE. Są to supły wymierne skręcone tylko w poziomie.

Obracając n-krotnie końce SE i SW supła $[\infty]$, dostaniemy supeł wymierny skręcony tylko w pionie, który będziemy oznaczać $\dfrac{1}{[n]}$ albo $[n]^{-1}$.

Supły $[n]$ i $[n]^{-1}$ nazwiemy **elementarnymi**, w szczególności supły wymierne $[n]$ nazywane są często **supłami całkowitymi**.

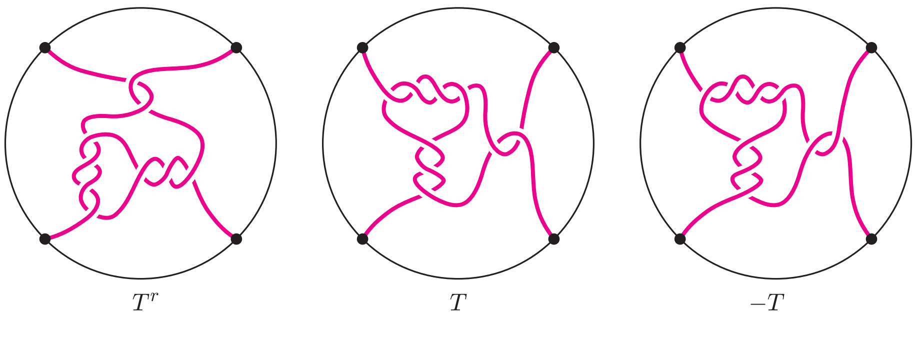


Rys. 4. Powstawanie supłów typu $[n]$ i $[n]^{-1}$.

Opiszemy teraz kilka operacji na supłach (dokładniej na ich diagramach), które są przydatne przy ich klasyfikacji.

Jeśli T jest supłem, to jego lustrzany obraz $-T$ powstaje z T przez zastąpienie skrzyżowań typu „most” skrzyżowaniami typu „tunel”. Symbolem T^r oznaczmy supeł powstały z T przez jego obrót o 90 stopni przeciwnie do wskazówek zegara.

Nawiązując konsekwentnie do oznaczeń supłów elementarnych, supeł odwrotny do T definiujemy za pomocą zależności $\dfrac{1}{T} = T^{-1} = -T^r$. Widzimy, że supły $[n]$ i $\dfrac{1}{[n]}$ są wzajemnie odwrotne. Uzasadnienie mają w tej konwencji oznaczenia $[\infty] = [0]^{-1}$ i $[\infty]^{-1} = [0]$.



Rys. 5. Lustrzany obraz i obrót supła.

Supły możemy dodawać i mnożyć. Suma $T + S$ powstaje z supłów T i S przez połączenie końców NE i SE supła T odpowiednio z końcami NW i SW supła S. Natomiast iloczyn $T * S$ tworzymy przez połączenie końców SW i SE supła T z końcami odpowiednio NW i NE supła S.

Rozwiązanie zadania M 1081.
Załóżmy, że liczby 2^{2004} oraz 5^{2004} mają odpowiednio a oraz b cyfr w układzie dziesiętnym. Szukamy wartości wyrażenia $a + b$. Mamy:

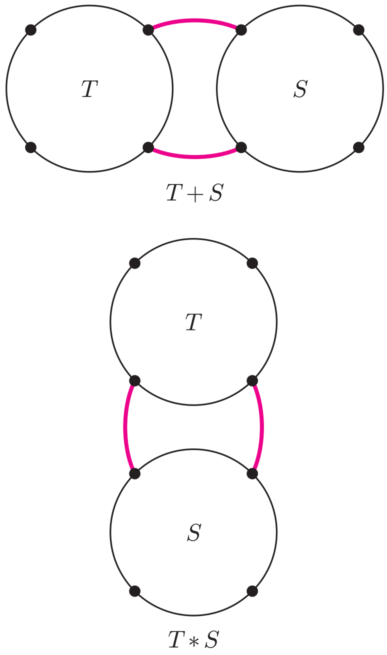
$$10^{a-1} < 2^{2004} < 10^{a},$$
$$10^{b-1} < 5^{2004} < 10^{b}.$$

Mnożąc stronami uzyskane nierówności, otrzymujemy

$$10^{a+b-2} < 10^{2004} < 10^{a+b},$$

skąd $2004 = a + b - 1$. A zatem $a + b = 2005$.

Supły możemy też obracać w ten sposób, że koniec NE przejdzie na SE, a NW na SW – jest to taki poziomy „przewrót” – albo tak, że NW przejdzie na NE oraz SW na SE – tym razem „przewrót” w pionie. Natychmiast widać, że supły elementarne nie zmieniają się przy takich przekształceniach. Nieco trudniej natomiast dowodzi się (wykorzystując indukcję), że za pomocą „przewrotów” dowolny supeł wymierny przekształcany jest na supeł równoważny. Dzięki temu supły wymierne T i T^{-1} są równoważne i, żeby otrzymać z T supeł T^{-1}, możemy obracać $-T$ zgodnie ze wskazówkami zegara lub przeciwnie.



Rys. 6. Suma i iloczyn supłów.

Wykorzystując opisane operacje, można udowodnić, że każdy supeł wymierny da się skonstruować za pomocą skręceń wykonywanych tylko na końcach z prawej strony (NE, SE) na przemian ze skręceniami na końcach dolnych (SW, SE) – w samej definicji nie wyróżnia się, które końce i w jakiej kolejności należy skręcać. Takie przedstawienie supła wymiernego nazywamy jego **postacią** (formą) **standardową**.

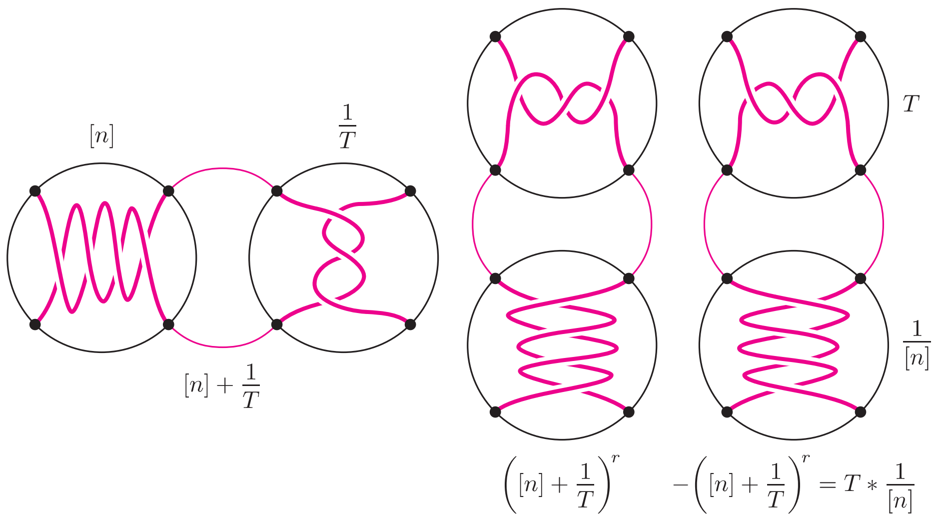
Każdy supeł wymierny w postaci standardowej może być więc otrzymany z supła $[0]$ lub $[\infty]$ za pomocą odpowiedniego ciągu dodawań supłów $[1]$ lub $[-1]$ i mnożeń przez te supły.

Zauważmy, że prawdziwa jest zależność:

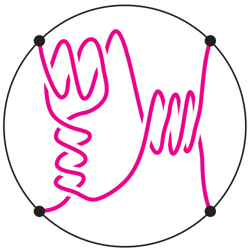
Jeśli T jest supłem wymiernym, to

(1)
$$T * \frac{1}{[n]} = \frac{1}{[n] + \frac{1}{T}}.$$

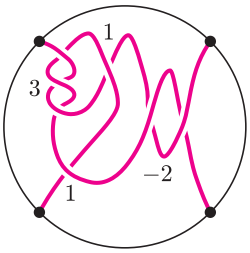
Wynika to ze spostrzeżenia, że obrót o $90°$ supła
$$T * \frac{1}{[n]}$$
prowadzi do supła
$$-[n] - \frac{1}{T},$$
czyli
$$\left(T * \frac{1}{[n]}\right)^r = -[n] - \frac{1}{T},$$
a stąd i z definicji supła odwrotnego
$$\left(T * \frac{1}{[n]}\right)^{-1} = [n] + \frac{1}{T}$$
(pamiętajmy o „przewrotach”). Jeśli teraz zastosujemy jeszcze raz operację odwracania, to dostaniemy poszukiwaną zależność.



Rys. 7. Ilustracja uzasadnienia wzoru (1).



$$[3] * \frac{1}{[4]} + [-4]$$



$$[[-2], [1], [1], [3]]$$

Rys. 8. Przykłady.

Pozwala to konstruować supeł wymierny za pomocą ciągu dodawań supłów elementarnych i operacji odwracania. Więcej, każdy supeł wymierny można sprowadzić do postaci standardowej wyglądającej następująco:

$$(*) \qquad [a_1] + \cfrac{1}{[a_2] + \ldots + \cfrac{1}{[a_{n-1}] + \cfrac{1}{[a_n]}}},$$

gdzie $a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Krócej piszemy

$$[[a_1],\ [a_2], \ldots, [a_n]].$$

W szczególności supeł

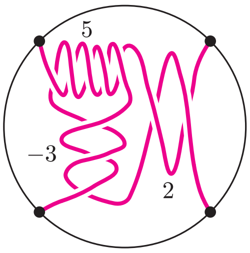
$$[k] * \frac{1}{[m]} + [n]$$

przyjmuje postać

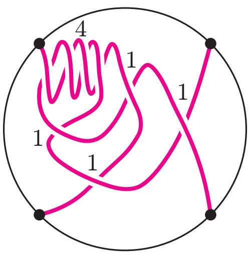
$$[n] + \cfrac{1}{[m] + \cfrac{1}{[k]}}.$$

Naturalne więc wydaje się przypisanie supłowi wymiernemu T, który ma postać formalnego ułamka łańcuchowego, arytmetycznego ułamka łańcuchowego zbudowanego z odpowiednich liczb skręceń. Supłowi postaci $(*)$ przyporządkowujemy zatem ułamek łańcuchowy

$$(**) \qquad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}.$$



$$\frac{23}{14} = 2 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{1}{5}}$$



$$\frac{23}{14} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$$

Rys. 9. Supły wymierne równoważne.

Nazywamy go ułamkiem danego supła wymiernego T i oznaczamy $F(T)$. Ułamek $(**)$ zapisujemy w skrócie

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p}{q},$$

gdzie p i q są względnie pierwsze.

Prawdziwe są następujące zależności:

$$F(T + [\pm 1]) = F(T) \pm 1,$$
$$F\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{F(T)},$$
$$F(-T) = -F(T).$$

Proponujemy, żeby Czytelnik spróbował uzasadnić te wzory.

Niestety, supeł T nie wyznacza jednoznacznie liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Supły równoważne mogą być reprezentowane przez różne ciągi liczb. Różne ciągi mogą jednak generować te same ułamki i prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Dwa supły wymierne T i T' są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne ułamki, czyli gdy $F(T) = F(T')$.*

Dowód twierdzenia polega na przedstawieniu supłów w postaci ułamków łańcuchowych, wykorzystaniu arytmetycznych własności samych ułamków oraz hipotezy (udowodnionej w 1993 roku), nazywanej hipotezą Taita, wiążącej równoważność węzłów (i supłów) z pewnymi prostymi operacjami niezmieniającymi postaci ułamkowej supłów.

Tak więc supły wymierne mogą być jednoznacznie opisane przez liczby wymierne (rozszerzone o dodatkowy element ∞). Supły te ze względu na swą prostotę opisu (a także klasyfikacji) chętnie są wykorzystywane do modelowania różnych sytuacji w matematyce i w innych dziedzinach. W teorii węzłów są ściśle związane z tak zwanymi węzłami z dwoma mostami, a w biologii molekularnej służą do opisu pewnych ważnych zjawisk dotyczących mechanizmów rekombinacji DNA. Są to jednak tematy na inne opowiadania.