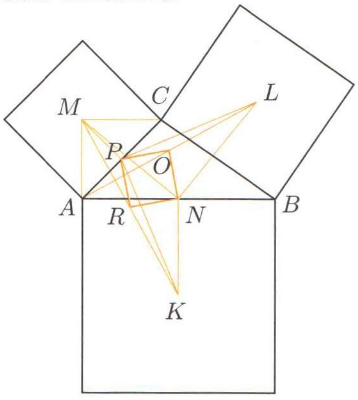
Zadanie 5. Punkty K, L, M są środkami kwadratów zbudowanych zewnętrznie na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC. Wykazać, że

(a) odcinki KM i AL są prostopadłe,

(b) środki odcinków AB, AL, AC i MK są wierzchołkami kwadratu.



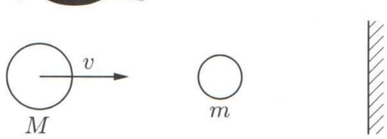
Rozwiązanie. Przez N, O, P i R oznaczmy kolejno środki odcinków AB, AL, AC i KM.

(a) Na podstawie zadania 4 stwierdzamy, że MNL jest prostokątnym trójkątem równoramiennym, przy czym $\sphericalangle LNM = 90°$. Zauważmy, że $\mathcal{O}_N^{90°}(A) = K$ oraz $\mathcal{O}_N^{90°}(L) = M$. Tak więc $\mathcal{O}_N^{90°}(AL) = KM$. W szczególności odcinki AL i KM są prostopadłe.

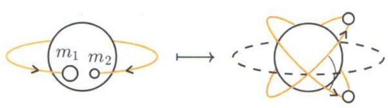
(b) Z $(**)$ wiemy, że $\mathcal{O}_N^{90°} \circ \mathcal{O}_P^{90°}$ jest symetrią środkową $\mathcal{S}_X$. Ponieważ $\mathcal{O}_N^{90°} \circ \mathcal{O}_P^{90°}(M) = K$, więc środek X tej symetrii pokrywa się ze środkiem R odcinka KM. Ponadto z $(*)$ wynika również, że PRN jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Z zadania 4 wynika, że $\sphericalangle KPL = 90°$ oraz $PK = PL$. Tak więc $\mathcal{O}_P^{90°} \circ \mathcal{O}_N^{90°}(A) = L$. Stąd $\mathcal{O}_P^{90°} \circ \mathcal{O}_N^{90°}$ jest symetrią środkową względem środka O odcinka AL oraz tak jak poprzednio NOP jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Ostatecznie czworokąt $NOPR$ jest kwadratem.

Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



Rys. 1



Rys. 2

F 629. Kula o masie M porusza się w kierunku kuli o masie m, za którą stoi ściana (rys. 1). Jaki musi być stosunek mas kul, aby obie kule zderzyły się dokładnie dwa razy?
Rozwiązanie na str. 16

F 630. Na orbicie kołowej o promieniu R wokół planety o masie M zderzają się dwa ciała o masach m_1 i m_2. W wyniku zderzenia powstają dwa ciała o jednakowych masach, poruszające się po orbitach kołowych o tym samym promieniu, lecz nachylonych pod kątem 45° do orbity początkowej (rys. 2). Jaki był stosunek mas ciał m_1 i m_2 i jaka energia wydzieliła się podczas zderzenia?
Rozwiązanie na str. 16

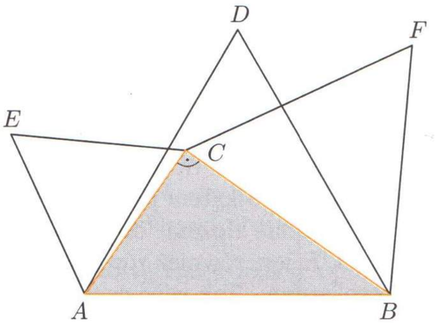
Redaguje Waldemar POMPE

M 1075. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita n, dla której liczba

$$n^2 + n - 1$$

jest podzielna przez 25.
Rozwiązanie na str. 9

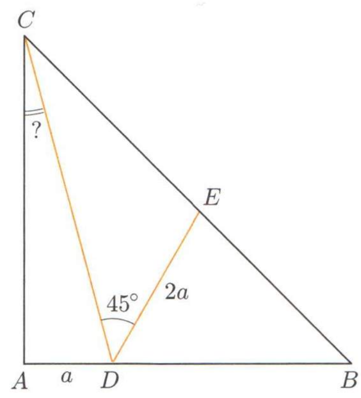
M 1076. Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC budujemy, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ACE i BCF. Ponadto na przeciwprostokątnej AB budujemy trójkąt równoboczny ABD przy czym C i D leżą po tej samej stronie prostej AB (rys. 3).



Rys. 3

Wykazać, że pole trójkąta ABC jest równe polu czworokąta $ECFD$.
Rozwiązanie na str. 3

M 1077. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC ($AB = AC$, rys. 4) punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i BC, przy czym $\sphericalangle CDE = 45°$ oraz $DE = 2 \cdot AD$. Wyznaczyć miarę kąta ACD.



Rys. 4

Rozwiązanie na str. 9