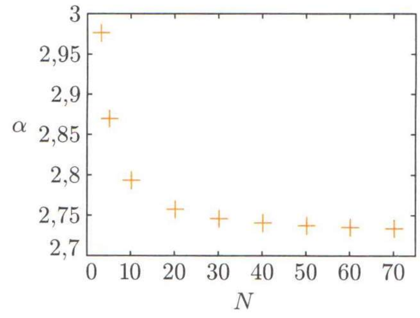
Z kolei rysunek 4 pokazuje zależność współczynnika α od N (pierwiastka kwadratowego z liczby kwadracików, na które podzielono płytę).



Rys. 4. Wartości współczynnika α dla różnych N.

Analiza metodą najmniejszych kwadratów pokazuje, że zależność ta jest postaci $\alpha = A + B/N$, gdzie $A \approx 2{,}72 \pm 0,001$, $B \approx 0{,}76 \pm 0{,}007$.

Gęstość ładunku w narożnym kwadraciku zależy od parametru N jak $A + B\sqrt{N}$. Analiza metodą najmniejszych kwadratów daje nam wartości $A \approx -1{,}9 \pm 0{,}2$, $B \approx 1{,}36 \pm 0{,}04$.

Podobnie jest z gęstością ładunku pośrodku krawędzi płyty, tutaj również zależność ma charakter $A + B\sqrt{N}$, dla $A \approx 0{,}11 \pm 0{,}01$, $B \approx 0{,}413 \pm 0{,}001$. Prosty rachunek pokazuje, że dla $N \to \infty$ cały ładunek znajduje się *we wnętrzu* płyty przewodzącej (czyli nie na brzegach). Istotnie, zsumowanie gęstości ładunku znajdującego się na skrajnych kwadracikach daje ładunek

$$(7) \qquad q_{\text{brzegowy}} \approx 4N\frac{l^2}{N^2}\left(A + B\sqrt{N}\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Inna sytuacja zachodzi na środku płyty, gdzie zależność gęstości ładunku od N ma charakter $A + B/N$. Parametry A i B mają wartości $A \approx 0{,}4836 \pm 0{,}0002$, $B \approx 0{,}319 \pm 0{,}006$, a współczynnik korelacji jest równy $R = 0{,}999$. Tu z kolei, kiedy wybierzemy sobie mały obszar na środku płyty o *stałym* polu powierzchni S i zsumujemy ładunek znajdujący się na nim, to otrzymamy

$$(8) \qquad q_{\text{środek}} = S\,(A + B/N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} SA \neq 0.$$

Powyższe wyniki są bodaj najważniejsze, ponieważ uzmysławiają nam największą różnicę między przewodnikiem dwuwymiarowym a trójwymiarowym: w tym ostatnim *cały* ładunek gromadzi się na brzegu

$$(q_{\text{brzegowy}} \to Q_{\text{tot}}, \quad q_{\text{środek}} \to 0),$$

odwrotnie niż w przypadku dwuwymiarowym.

Autor dziękuje swojej żonie Agnieszce za cenne uwagi krytyczne.

Uogólniony wzór Eulera dla wielościanów *Adam PIWOCKI*

W XVIII wieku Leonard Euler stwierdził, że

w każdym wielościanie wypukłym ścian i wierzchołków jest razem dokładnie tyle, ile jest krawędzi plus dwa.

Jeżeli oznaczymy wierzchołki, krawędzie i ściany odpowiednio przez N_0, N_1 i N_2, to twierdzenie Eulera mówi, że:

$$N_0 + N_2 = N_1 + 2 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

(Lewą stronę drugiej równości nazywa się *charakterystyką Eulera-Poincarégo*, jest ona ważnym niezmiennikiem topologicznym.)

Równanie Eulera ma swoją wersję dla wielokątów, mianowicie

każdy wielokąt wypukły ma tyle wierzchołków, co krawędzi,

czyli

$$N_0 = N_1 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 = 0.$$

Gdzie jest dwójka? Poszukajmy jej w jeszcze niższym wymiarze:

każdy odcinek na prostej ma dwa wierzchołki końcowe,

tzn. $N_0 = 2$. Tu prawa strona znowu wygląda jak w pierwotnym równaniu Eulera, więc może jest błąd we wzorze dla wielokątów? Nie. Dla „wielościanu" w przestrzeni czterowymiarowej

wierzchołków i ścian jest tyle, co krawędzi i komórek trójwymiarowych,

czyli

$$N_0 + N_2 = N_1 + N_3 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0.$$

Widać to na przykładzie 4-sympleksu (patrz *Delta* 8/2004), który składa się z pięciu czworościanów sklejonych ścianami, więc ma 5 komórek trójwymiarowych, 10 ścian, 10 krawędzi i 5 wierzchołków. Jednak odpowiedź na pytanie

dlaczego na przemian pojawia się zero i dwójka?

podał Schläfli, uogólniając jeszcze bardziej wzór Eulera. Jeśli przez N_k oznaczymy liczbę komórek k-wymiarowych w n-wymiarowym wielościanie ($k < n$), to mamy:

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \ldots + (-1)^{n-1}N_{n-1} = 1 - (-1)^n$$

Teraz ten wzór zagmatwamy jeszcze bardziej. Zauważmy, że wielościan, którego największe „ściany" są $(n-1)$-wymiarowe, ma n-wymiarowe wnętrze podzielone na N_n części (ograniczając się do wielościanów mniej lub bardziej regularnych, dostajemy $N_n = 1$). Oznaczmy przez N_{-1} liczbę części, na które wielościan dzieli swoje „zewnętrze", czyli dopełnienie (w przypadku takich wielościanów $N_{-1} = 1$). Wówczas wzór Schläfliego ma postać:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^{n-1}N_{n-1} + (-1)^n N_n = N_{-1}.$$