Suma pochodnych

Lev KOURLIANDTCHIK

Na LIV Olimpiadzie Matematycznej w zawodach I stopnia zostało zaproponowane następujące zadanie.

Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy

$$A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3,$$
$$B = bcd + cda + abc,$$
$$C = (a + b + c + d)^3.$$

Udowodnić nierówność $C \leqslant 4A + 24B$.

W artykule tym opowiemy o pewnej metodzie dowodzenia nierówności tego rodzaju. Opiera się ona na twierdzeniu, które jest uogólnieniem następującego oczywistego lematu

Lemat. Niech funkcja f będzie różniczkowalna oraz niech spełnione będą dwa warunki: $f(0) \geqslant 0$ oraz $f'(x) \geqslant 0$ dla x nieujemnych. Wtedy $f(x) \geqslant 0$ dla wszystkich x nieujemnych.

Przez f'_{x_i} oznaczamy dalej pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x_i. Pochodną taką oblicza się w ten sposób, że tylko x_i traktujemy jako zmienną, natomiast wszystkie pozostałe zmienne traktujemy jako stałe. Np. dla funkcji $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$ mamy

$$f'_{x_2} = {x_1}^2 \cdot 3{x_2}^2,$$

gdyż x_1 potraktowaliśmy tu jako stałą. Podobnie dla funkcji $g(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ mamy

$$g'_x = 2xy^3 z^4,$$

bo tym razem y i z traktowaliśmy jako stałe. Pochodna cząstkowa f'_{x_i} mierzy, jak rośnie funkcja f w kierunku x_i. Jeśli w jakimś punkcie A pochodna ta jest dodatnia, to znaczy, że w kierunku x_i od punktu A funkcja f wzrasta. Gdy pochodna ta jest ujemna, w kierunku x_i funkcja f maleje.

Twierdzenie. Niech funkcja f spełnia dla nieujemnych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ następujące $n + 1$ nierówności

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) + f'_{x_2}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0.$$

Wtedy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ dla dowolnych nieujemnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dowód. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami nieujemnymi oraz niech a będzie najmniejszą z nich. Wtedy liczby

$$y_1 = x_1 - a, \quad y_2 = x_2 - a, \ldots, y_n = x_n - a$$

też są nieujemne, przy czym przynajmniej jedna spośród nich jest równa zeru. Zatem na mocy pierwszej z założonych nierówności $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqslant 0$.

Rozważmy teraz określoną dla liczb nieujemnych funkcję jednej zmiennej t

$$g(t) = f(y_1 + t, y_2 + t, \ldots, y_n + t).$$

Zachodzą nierówności

$$g(0) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqslant 0,$$

$$g'(t) = f'_{y_1} + f'_{y_2} + \ldots + f'_{y_n} \geqslant 0.$$

Wobec tego z lematu wynika, że dla każdego nieujemnego t wartość $g(t)$ jest nieujemna. Zatem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + a, y_2 + a, \ldots, y_n + a) = g(a) \geqslant 0,$$

co dowodzi twierdzenia.

Pokażemy skuteczność tej metody na kilku przykładach.

Przykład 1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcję

$$f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a.$$

Mamy oczywiście

$$f(0,b,c) \geqslant 0, \quad f(a,0,c) \geqslant 0, \quad f(a,b,0) \geqslant 0.$$

Ponadto

$$f'_a + f'_b + f'_c = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0.$$

Przykład 2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3c + b^3a + c^3b \geqslant abc(a+b+c).$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcję

$$f(a,b,c) = a^3c + b^3a + c^3b - abc(a+b+c) = a^3c + b^3a + c^3b - a^2bc - b^2ca - c^2ab.$$

Po pierwsze jest oczywiste, że

$$f(0,b,c) \geqslant 0, \quad f(a,0,c) \geqslant 0, \quad f(a,b,0) \geqslant 0.$$

Po drugie

$$f'_a + f'_b + f'_c = (a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a) + 2(a^2c + b^2a + c^2b - 3abc) \geqslant 0,$$

bowiem z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3\sqrt[3]{a^2c \cdot b^2a \cdot c^2b} = 3abc.$$

Przykład 3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcję

$$f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a).$$

Ponieważ jest ona symetryczna, tzn.

$$f(a,b,c) = f(a,c,b) = f(b,a,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b) = f(c,b,a),$$

więc dla sprawdzenia pierwszego warunku wystarczy dowieść, że $f(a,b,0) \geqslant 0$. Mamy

$$f(a,b,0) = a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \geqslant 0.$$

I dalej

$$f'_a + f'_b + f'_c = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqslant 0,$$

co dowodzi żądanej nierówności.

Zmierzymy się teraz z zadaniem wspomnianym na początku artykułu. W istocie rozwiążemy zadanie nieco trudniejsze.

Przykład 4. Niech A, B, C będą takie, jak w wyjściowym zadaniu z LIV OM. Udowodnić (mocniejszą od oryginalnej) nierówność

$$C \leqslant 4A + 15B.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= 4(a^3+b^3+c^3+d^3) + 15(bcd + cda + dab + abc) - (a+b+c+d)^3 = \\ &= 3(a^3+b^3+c^3+d^3) + 9(bcd+cda+dab+abc) - 3(a^2b + a^2c + a^2d + \\ &\quad + b^2a + b^2c + b^2d + c^2a + c^2b + c^2d + d^2a + d^2b + d^2c). \end{aligned}$$

Wykażemy, że funkcja ta spełnia założenia twierdzenia. Ponieważ jest ona symetryczna, więc dla sprawdzenia pierwszego warunku wystarczy sprawdzić, że zachodzi nierówność $f(a,b,c,0) \geqslant 0$. Mamy

$$f(a,b,c,0) = 3(a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - a^2c - b^2a - b^2c - c^2a - c^2b + 3abc).$$

Dalej mamy

$$f'_a + f'_b + f'_c + f'_d = 6(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geqslant 0,$$

co kończy dowód.

Zainteresowanemu Czytelnikowi proponuję samodzielnie udowodnić następujące twierdzenie. *Niech α, β będą takimi liczbami dodatnimi, że $\alpha + \beta \geqslant 16$, $3\alpha + \beta \geqslant 27$. Wtedy prawdziwa jest nierówność $C \leqslant \alpha A + \beta B$.*

Rozwiązanie zadania M 1075. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby całkowitej n liczba n^2+n-1 jest podzielna przez 25. Wówczas liczba

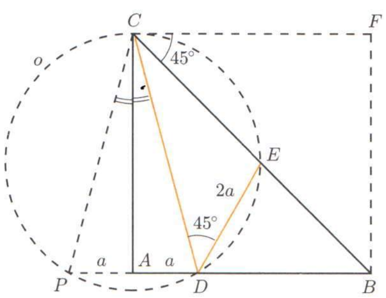
$$(n^2+n-1) - 5 = (n+3)(n-2)$$

jest podzielna przez 5. Ponieważ liczby $n+3$ i $n-2$ różnią się o 5, więc obie muszą być podzielne przez 5, a zatem iloczyn $(n+3)(n-2)$ jest liczbą podzielną przez 25. Ale wtedy liczba n^2+n-1 nie może być podzielna przez 25, gdyż

$$(n^2+n-1) - (n+3)(n-2) = 5.$$

Sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 1077. Uzupełnijmy trójkąt ABC do kwadratu $ABFC$.



Z równości

$$\sphericalangle FCB = 45^\circ = \sphericalangle CDE$$

wynika, że okrąg o, opisany na trójkącie CDE, jest styczny do prostej CF. Zatem prosta CA przechodzi przez środek okręgu o, a punkt P – symetryczny do punktu D względem prostej AC, leży na okręgu o. Ponadto $PD = DE$. Stąd

$$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle PCD = \frac{1}{2}\sphericalangle DCE.$$

Wiemy również, że

$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCE = 45^\circ,$$

skąd bezpośrednio obliczamy

$$\sphericalangle ACD = 15^\circ.$$