

Rozkład ładunku elektrycznego w dwuwymiarowym przewodniku

Roman WERPACHOWSKI

W przyrodzie rozróżniamy materiały przewodzące, w których ładunek elektryczny może się swobodnie przemieszczać, i izolatory, w których takiej swobody nie ma. W obu typach materiałów może występować niezerowy ładunek elektryczny, wytwarzając pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz próbki. W przewodniku taki ładunek nazywamy ładunkiem swobodnym. Jego nośnikami są elektrony swobodne (niezwiązane z atomami sieci krystalicznej). Oprócz tego źródło pola może znajdować się na zewnątrz próbki (możemy obok położyć drugą albo włożyć naszą próbkę między okładki kondensatora). Nie będę się zajmował takim przypadkiem, ograniczając się do sytuacji, w której jedynym źródłem pola są ładunki swobodne wewnątrz przewodnika.

Jeżeli pole elektryczne wewnątrz przewodnika jest różne od zera, elektrony swobodne poruszają się pod jego wpływem i ich rozkład ulega zmianie. Rozkład ładunku będzie w stanie równowagi (nie będzie zmieniał się w czasie), kiedy pole elektryczne wewnątrz przewodnika zniknie. Elektrony, przemieszczając się, same zmieniają pole elektryczne, i to w taki sposób, żeby całkowite pole zmniejszyło się (w ten sposób układ „przewodnik + ładunki swobodne” minimalizuje swoją energię). Gdyby przewodnik był nieskończenie duży (nie miał brzegów), rozkładem, dla którego zachodziłaby równowaga (rozkładem równowagowym), byłby rozkład jednostajny, ze stałą gęstością ładunku. Istnienie brzegów powoduje, że rozkład ładunku swobodnego w przewodniku skończonym (z brzegami) nie jest jednostajny.

Odpowiedź na pytanie „to jaki jest rozkład równowagowy?” przynosi nam prawo Gaussa: liczba linii pola elektrycznego wychodzących z zamkniętej powierzchni jest wprost proporcjonalna do ładunku zawartego wewnątrz niej. Skoro, w stanie równowagi, wewnątrz przewodnika pole elektryczne musi być równe zeru, nie może tam być żadnych ładunków swobodnych. Gdzie się więc podziały? Cały ładunek znajduje się *na brzegu* przewodnika, gdyż tam jedynie może być niezerowe pole elektryczne.

Wydawać by się mogło, że znamy już odpowiedź na dręczące nas pytanie, i w tym miejscu artykuł powinien się skończyć. Tak jednak nie jest.



Powyższe rozumowanie przeprowadziłem dla przewodnika trójwymiarowego. Co się stanie, jeżeli wyobrazimy sobie przewodnik jako dwuwymiarową płaszczyznę? Do ustalenia się równowagowego rozkładu ładunku w przewodniku dwuwymiarowym potrzeba i wystarcza, żeby *równoległa* do jego powierzchni składowa pola elektrycznego była równa zeru. Składowa prostopadła nie musi być równa zeru, a co za tym idzie, z dowolnego punktu przewodnika może wychodzić niezerowa liczba linii pola. To z kolei oznacza, że w takim punkcie może się znajdować niezerowy ładunek elektryczny! Problem więc istnieje, a do jego rozwiązania, jak pokażę, warto zaprząć komputer.

Posłużę się przybliżeniem: płytkę kwadratową o boku l podzielę na $N \times N$ małych kwadracików, zakładając, że wewnątrz kwadracika gęstość ładunku jest stała. Całkowity ładunek na płytce jest ustalony i równy

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_{ij} = Q_{\text{tot}}$$

Symbolem q_{ij} oznaczam ilość ładunku zgromadzonego w elementarnym kwadraciku o indeksach i, j . Jest ona równa

$$q_{ij} = \frac{l^2}{N^2} \rho \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{N}, \left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{N} \right),$$

gdzie $\rho(x, y)$ jest gęstością ładunku w punkcie o współrzędnych (x, y) .

Interesuje nas równowagowy rozkład ładunku elektrycznego $\rho(x, y)$ na powierzchni kwadratowej płytki przewodzącej o boku długości l . Określa go warunek stałości potencjału na płytce; w naszym przybliżeniu oznacza to, że potencjał generowany przez ładunki $q_{i'j'}$ skoncentrowane na środkach kwadracików o indeksach i', j' jest taki sam, kiedy zmierzy się go na środku dowolnego kwadracika o indeksach i, j :

$$(2) \quad V_{ij} = \frac{1}{l} \sum_{i'=0}^N \sum_{j'=1}^N \frac{q_{i'j'}}{\sqrt{(i-i')^2 + (j-j')^2}} = V_0,$$

(korzystam z układu jednostek Gaussa). Jednocześnie musi być spełniony warunek (1).

Analiza wymiarowa wskazuje, że stały potencjał V_0 zależy od całkowitego ładunku Q_{tot} i długości boku płytki l :

$$(3) \quad V_0 = \alpha \frac{Q_{\text{tot}}}{l},$$

gdzie α jest bezwymiarową stałą. Jednym z naszych celów jest znalezienie tej stałej dla różnych wartości N .

Uważny Czytelnik zauważy pewien problem pojawiający się w obliczeniu potencjału V_{ij} . Otóż dla $i' = i$ i $j' = j$ w mianowniku pojawia się zero. Te wyrazy w sumie musimy więc potraktować inaczej.

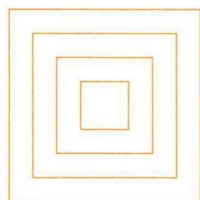
Przypadek $i' = i, j' = j$ odpowiada obliczaniu potencjału generowanego przez rozkład ładunku zawartego w kwadraciku otaczającym interesujący nas punkt. Zgrubne przybliżenie, polegające na zastąpieniu rozkładu ciągłego rozkładem punktowym skoncentrowanym w środkach kwadracików (na tym polega przybliżenie (2)) prowadzi do pojawienia się pod znakiem sumy nieskończonych wyrazów. Potraktujemy te wyrazy oddzielnie, zastępując realny rozkład ciągły rozkładem jednostajnym: obliczając V_{ij} przyjmujemy, że na (i, j) -tym kwadraciku ładunek q_{ij} jest rozłożony jednostajnie, czyli że gęstość ładunku w tym kwadraciku jest równa

$$\frac{N^2 q_{ij}}{l^2}.$$

Następnie, obliczymy wkład do potencjału pochodzący od tego kwadracika w pewien specjalny sposób, otrzymując na końcu wynik:

$$(4) \quad V_{ij} = 3,52494Nq_{ij}/l + \frac{N}{l} \sum_{(i',j') \neq (i,j)} \frac{q_{i'j'}}{\sqrt{(i-i')^2 + (j-j')^2}}.$$

Obliczenie pierwszego członu wzoru (4) wymaga nieco sprytu. Kwadracik (i, j) podzielimy na nieskończenie cienkie „ramki” (patrz rys. 1) o boku równym ich podwójnej odległości od środka kwadracika i najpierw scałkujemy po każdej z nich, a następnie wkłady do potencjału od ramek.



Rys. 1. Podział kwadracika przy całkowaniu.

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{l^2} \int_{-l/(2N)}^{l/(2N)} \left(\int_{-l/(2N)}^{l/(2N)} \frac{q_{ij}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} dy' \right) dx' = \\ = \frac{4N^2}{l^2} \int_0^{l/(2N)} \left(\int_{-a}^a \frac{q_{ij}}{\sqrt{s^2 + a^2}} ds \right) da. \end{aligned}$$

Wartość tej całki wynosi w przybliżeniu $3,52494Nq_{ij}/l$. Gdybyśmy wybrali inny sposób obliczenia, moglibyśmy uzyskać po drodze funkcję podcałkową przyjmującą nieskończone wartości. Taki sposób ominięcia problemu

nazywa się *regularyzacją* całki, i jest to chwyt używany przez teoretyków w wielu działach fizyki.

Najprostszym sposobem na znalezienie konkretnego rozwiązania jest przyjęcie, że szukamy rozkładu ładunku generującego stały rozkład potencjału o zadanej wartości V_0 . Zsumowanie wszystkich q_{ij} da nam wartość całkowitego ładunku Q_{tot} , co – razem ze znajomością l – pozwoli obliczyć stałą α ze wzoru (3). Obliczenie rozkładu o zadanym całkowitym ładunku Q_{tot} sprowadzi się wówczas do przeskalowania jakiegokolwiek rozwiązania z zadanym V_0 według wzoru

$$(5) \quad \rho_{Q_{\text{tot}}} = \frac{\alpha Q_{\text{tot}}}{lV_0} \rho_{V_0}.$$

Warunek (4) jest równoważny układowi równań liniowych na q_{ij} :

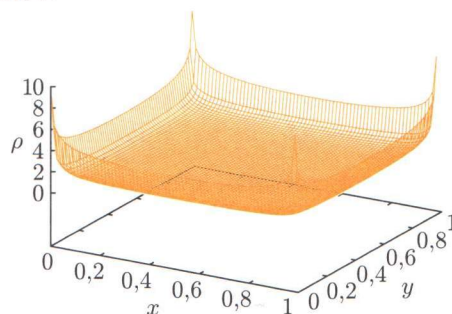
$$(6) \quad \forall_{i,j=1,\dots,N} \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=1}^N f_{i-i',j-j'} q_{ij} = V_0,$$

gdzie f_{00} jest równe $3,52494N/l$, a

$$f_{ij} = f_{ji} = \frac{N}{l\sqrt{i^2 + j^2}}.$$

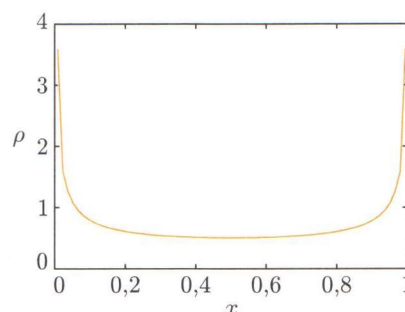
Rozwiązanie takiego układu jest już bardzo proste i wymaga użycia odpowiedniej procedury numerycznej. Warto zauważyć, że jeśli zapiszemy układ równań (6) w postaci macierzowej $A \cdot X = B$, to macierz A współczynników równania będzie symetryczna.

Rysunek 2 pokazuje rozkład ładunku $Q_{\text{tot}} = 1$ na płycie kwadratowej o długości boku $l = 1$ podzielonej na 70×70 kwadracików.



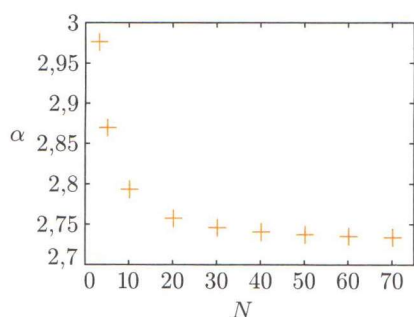
Rys. 2. Rozkład ładunku na płycie 70×70 .

Widać, że ładunek jest rozłożony na całej powierzchni płyty. Jeszcze lepiej widać to na rysunku 3 pokazującym przekrój gęstości ładunku przez środek płyty (równoległy do jej boku).



Rys. 3. Przekrój gęstości ładunku przez środek płyty 70×70 .

Z kolei rysunek 4 pokazuje zależność współczynnika α od N (pierwiastka kwadratowego z liczby kwadracików, na które podzielono płytę).



Rys. 4. Wartości współczynnika α dla różnych N .

Analiza metodą najmniejszych kwadratów pokazuje, że zależność ta jest postaci $\alpha = A + B/N$, gdzie $A \approx 2,72 \pm 0,001$, $B \approx 0,76 \pm 0,007$.

Gęstość ładunku w narożnym kwadracie zależy od parametru N jak $A + B\sqrt{N}$. Analiza metodą najmniejszych kwadratów daje nam wartości $A \approx -1,9 \pm 0,2$, $B \approx 1,36 \pm 0,04$.

Podobnie jest z gęstością ładunku pośrodku krawędzi płyty, tutaj również zależność ma charakter $A + B\sqrt{N}$,

dla $A \approx 0,11 \pm 0,01$, $B \approx 0,413 \pm 0,001$. Prosty rachunek pokazuje, że dla $N \rightarrow \infty$ cały ładunek znajduje się *we wnętrzu* płyty przewodzącej (czyli nie na brzegach). Istotnie, zsumowanie gęstości ładunku znajdującego się na skrajnych kwadracikach daje ładunek

$$(7) \quad q_{\text{brzegowy}} \approx 4N \frac{l^2}{N^2} (A + B\sqrt{N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Inna sytuacja zachodzi na środku płyty, gdzie zależność gęstości ładunku od N ma charakter $A + B/N$.

Parametry A i B mają wartości $A \approx 0,4836 \pm 0,0002$, $B \approx 0,319 \pm 0,006$, a współczynnik korelacji jest równy $R = 0,999$. Tu z kolei, kiedy wybierzemy sobie mały obszar na środku płyty o *stałym* polu powierzchni S i zsumujemy ładunek znajdujący się na nim, to otrzymamy

$$(8) \quad q_{\text{środek}} = S (A + B/N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} SA \neq 0.$$

Powyższe wyniki są bodaj najważniejsze, ponieważ uzmysławiają nam największą różnicę między przewodnikiem dwuwymiarowym a trójwymiarowym: w tym ostatnim *cały* ładunek gromadzi się na brzegu

$$(q_{\text{brzegowy}} \rightarrow Q_{\text{tot}}, \quad q_{\text{środek}} \rightarrow 0),$$

odwrotnie niż w przypadku dwuwymiarowym.

Autor dziękuje swojej żonie Agnieszce za cenne uwagi krytyczne.

Uogólniony wzór Eulera dla wielościanów Adam PIWOCKI

W XVIII wieku Leonard Euler stwierdził, że

w każdym wielościanie wypukłym ścian i wierzchołków jest razem dokładnie tyle, ile jest krawędzi plus dwa.

Jeżeli oznaczymy wierzchołki, krawędzie i ściany odpowiednio przez N_0 , N_1 i N_2 , to twierdzenie Eulera mówi, że:

$$N_0 + N_2 = N_1 + 2 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

(Lewą stronę drugiej równości nazywa się *charakterystyką Eulera-Poincarégo*, jest ona ważnym niezmiennikiem topologicznym.)

Równanie Eulera ma swoją wersję dla wielokątów, mianowicie

każdy wielokąt wypukły ma tyle wierzchołków, co krawędzi,

czyli

$$N_0 = N_1 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 = 0.$$

Gdzie jest dwójka? Poszukajmy jej w jeszcze niższym wymiarze:

każdy odcinek na prostej ma dwa wierzchołki końcowe,

tzn. $N_0 = 2$. Tu prawa strona znowu wygląda jak w pierwotnym równaniu Eulera, więc może jest błąd we wzorze dla wielokątów? Nie. Dla „wielościanu” w przestrzeni czterowymiarowej

wierzchołków i ścian jest tyle, co krawędzi i komórek trójwymiarowych,

czyli

$$N_0 + N_2 = N_1 + N_3 \quad \text{lub} \quad N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0.$$

Widać to na przykładzie 4-sympleksu (patrz *Delta* 8/2004), który składa się z pięciu czworościanów sklejonych ścianami, więc ma 5 komórek trójwymiarowych, 10 ścian, 10 krawędzi i 5 wierzchołków. Jednak odpowiedź na pytanie

dlaczego na przemian pojawia się zero i dwójka?

podał Schläfli, uogólniając jeszcze bardziej wzór Eulera. Jeśli przez N_k oznaczymy liczbę komórek k -wymiarowych w n -wymiarowym wielościanie ($k < n$), to mamy:

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 - (-1)^n$$

Teraz ten wzór zagmatwamy jeszcze bardziej.

Zauważmy, że wielościan, którego największe „ściany” są $(n-1)$ -wymiarowe, ma n -wymiarowe wnętrze podzielone na N_n części (ograniczając się do wielościanów mniej lub bardziej regularnych, dostajemy $N_n = 1$). Oznaczmy przez N_{-1} liczbę części, na które wielościan dzieli swoje „zewnątrze”, czyli dopełnienie (w przypadku takich wielościanów $N_{-1} = 1$). Wówczas wzór Schläfliego ma postać:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^{n-1} N_{n-1} + (-1)^n N_n = N_{-1}.$$