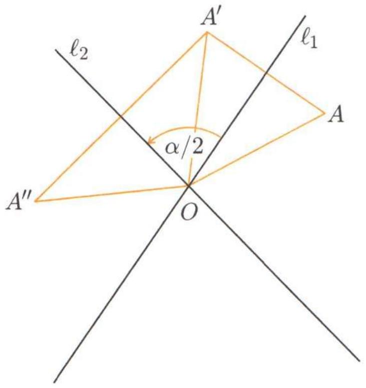
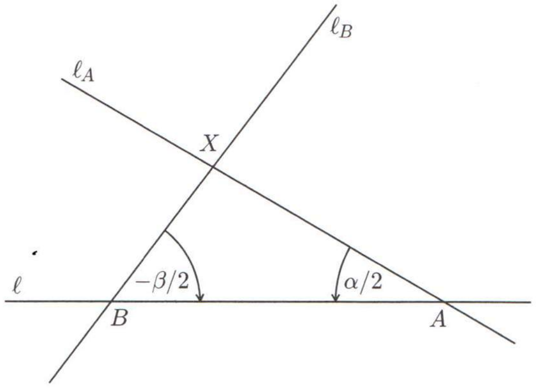
Obroty w zadaniach geometrycznych

Piotr GRZESZCZUK

Rozważmy na płaszczyźnie dwie proste ℓ_1, ℓ_2 przecinające się w punkcie O. Przypuśćmy, że kąt między tymi prostymi (mierzony od prostej ℓ_1 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) ma miarę $\alpha/2$. Niech S_{ℓ_i} oznacza symetrię osiową względem prostej ℓ_i $(i = 1, 2)$. Bez trudu możemy zauważyć, że złożenie tych symetrii $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ jest obrotem o kąt α wokół punktu O, który oznaczymy przez $\mathcal{O}_O^\alpha$. Odwrotnie, jeśli mamy dany obrót $\mathcal{O}_O^\alpha$, to wybierając **dowolną** prostą ℓ_1 przechodzącą przez punkt O, a następnie prowadząc przez O prostą ℓ_2 tworzącą z ℓ_1 kąt o mierze $\alpha/2$, możemy przedstawić $\mathcal{O}_O^\alpha$ w postaci złożenia symetrii osiowych $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$. Tak więc dowolny obrót jest złożeniem dwóch symetrii osiowych o osiach przechodzących przez środek obrotu. Zauważmy przy tym, iż jedna z osi może być wybrana dowolnie.





Rozważmy dwa obroty $\mathcal{O}_A^\alpha$ oraz $\mathcal{O}_B^\beta$. Zastanowimy się, jakim przekształceniem jest złożenie $\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha$ tych obrotów. W przypadku, gdy $A = B$, odpowiedź jest natychmiastowa. Otrzymujemy obrót $\mathcal{O}_A^{\alpha+\beta}$. Mniej oczywista jest sytuacja, gdy A i B są różnymi punktami.

Poprowadźmy przez punkty A i B prostą ℓ. Następnie narysujmy

- przez punkt A prostą ℓ_A tworzącą z prostą ℓ kąt o mierze $\alpha/2$ (mierzony od prostej ℓ_A),
- przez punkt B prostą ℓ_B tworzącą z prostą ℓ kąt o mierze $-\beta/2$ (mierzony od prostej ℓ_B).

Na mocy powyższych uwag rozważane obroty możemy przedstawić w postaci złożenia symetrii osiowych

$$\mathcal{O}_A^\alpha = \mathcal{S}_\ell \circ \mathcal{S}_{\ell_A}, \qquad \mathcal{O}_B^\beta = \mathcal{S}_{\ell_B} \circ \mathcal{S}_\ell.$$

Tak więc,

$$\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha = (\mathcal{S}_{\ell_B} \circ \mathcal{S}_\ell) \circ (\mathcal{S}_\ell \circ \mathcal{S}_{\ell_A}) =$$
$$= \mathcal{S}_{\ell_B} \circ (\mathcal{S}_\ell \circ \mathcal{S}_\ell) \circ \mathcal{S}_{\ell_A} = \mathcal{S}_{\ell_B} \circ \mathcal{S}_{\ell_A},$$

gdyż $\mathcal{S}_\ell \circ \mathcal{S}_\ell$ jest, oczywiście, przekształceniem tożsamościowym. Teraz staje się jasne, że jeśli proste ℓ_A i ℓ_B przecinają się w punkcie X, to

$$\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha = \mathcal{O}_X^{\alpha+\beta}.$$

W przypadku, gdy proste ℓ_A, ℓ_B są równoległe (ma to miejsce wtedy, gdy $\alpha + \beta$ jest całkowitą wielokrotnością kąta $360°$), złożenie rozważanych obrotów jest przesunięciem (jako złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach równoległych).

Podsumowanie. Jeżeli niezerowe kąty α, β są takie, że $\alpha + \beta$ nie jest całkowitą wielokrotnością $360°$ oraz $A \neq B$, to $\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha$

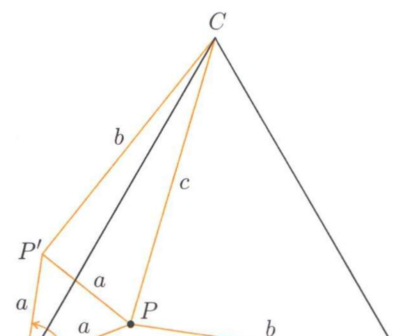
(*) jest obrotem $\mathcal{O}_X^{\alpha+\beta}$, gdzie X jest wierzchołkiem trójkąta XAB, takiego że $\sphericalangle XAB = \alpha/2$ i $\sphericalangle XBA = -\beta/2$;

(**) w szczególności jeśli $\alpha + \beta = 180°$, to $\mathcal{O}_B^\beta \circ \mathcal{O}_A^\alpha$ jest symetrią środkową względem punktu X (wyznaczonego w analogiczny jak wyżej sposób).

Umowa: $\sphericalangle XYZ$ oznacza kąt między półprostymi YX i YZ mierzony od półprostej YX.

Poniżej przedstawimy kilka zadań, w rozwiązaniach których zastosujemy obroty.

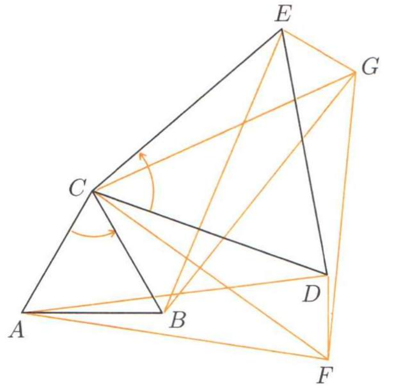
Zadanie 1. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC obrano punkt P, taki że $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$, gdzie $a^2 + b^2 = c^2$. Wyznaczyć długość boku trójkąta ABC.



Rozwiązanie. Rozważmy obrót $\mathcal{O}_A^{60°}$ oraz punkt $P' = \mathcal{O}_A^{60°}(P)$. Zauważmy, że $\mathcal{O}_A^{60°}(B) = C$. Tak więc $\mathcal{O}_A^{60°}(BP) = CP'$ i w szczególności $CP' = b$. Trójkąt APP' jest równoboczny, więc $PP' = a$. Z założeń wynika, iż $\sphericalangle PP'C = 90°$, czyli $\sphericalangle AP'C = 150°$. Stosując twierdzenie kosinusów do trójkąta ACP', uzyskujemy

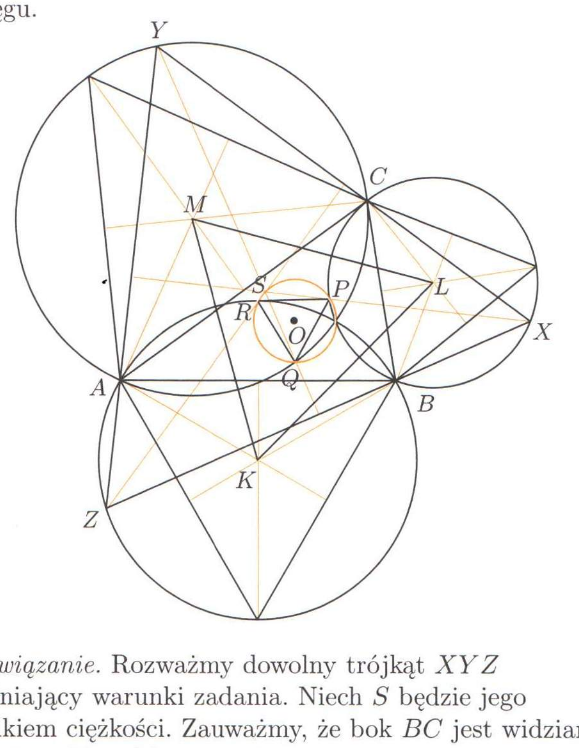
$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 150° = a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}.$$

Zadanie 2. Na płaszczyźnie dane są dwa trójkąty równoboczne ABC i CDE (mające wspólny wierzchołek C) oraz punkty F i G, takie że $AD = AF$, $BE = BG$ i $\sphericalangle DAF = \sphericalangle EBG$ (jako kąty skierowane). Wykazać, że trójkąt CFG jest równoboczny.



Rozwiązanie. Rozważmy obrót $\mathcal{O}_C^{60^\circ}$. Zauważmy, że $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(A) = B$, $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(D) = E$, czyli $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(AD) = BE$. Stąd w szczególności $AD = BE$. Na podstawie założeń ($AD = AF$, $BE = BG$ oraz $\sphericalangle DAF = \sphericalangle EBG$) trójkąty AFD i BGE są przystające. Tak więc $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(\triangle AFD) = \triangle BGE$, czyli $\mathcal{O}_C^{60^\circ}(F) = G$. Trójkat CFG jest zatem równoboczny.

Zadanie 3. **[LV Olimpiada Matematyczna, zadanie 4]** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne XYZ, że punkty A, B, C są punktami wewnętrznymi odcinków YZ, ZX, XY. Dowieść, że środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów leżą na jednym okręgu.



Rozwiązanie. Rozważmy dowolny trójkąt XYZ spełniający warunki zadania. Niech S będzie jego środkiem ciężkości. Zauważmy, że bok BC jest widziany z punktu X pod kątem $60°$, a więc X leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym zbudowanym zewnętrznie na boku BC. Analogicznie Y i Z leżą na okręgach opisanych na trójkątach równobocznych zbudowanych odpowiednio na bokach AC i AB.

Oznaczmy przez K, L, M kolejne środki tych okręgów. Z twierdzenia Napoleona (patrz np. *Delta* 6/2004) wynika, że trójkąt KLM jest równoboczny. Niech O oznacza jego środek ciężkości. Proste XS, YS, ZS (jako dwusieczne kątów wewnętrzych trójkąta XYZ) przecinają w połowie krótsze łuki BC, AC, AB narysowanych okręgów. Środki tych łuków oznaczmy kolejno przez P, Q, R. Zauważmy, że

$$\mathcal{O}_O^{120^\circ} = \mathcal{O}_M^{60^\circ} \circ \mathcal{O}_K^{60^\circ} = \mathcal{O}_L^{60^\circ} \circ \mathcal{O}_M^{60^\circ}.$$

Mamy więc

$$\mathcal{O}_O^{120^\circ}(R) = \mathcal{O}_M^{60^\circ}\left(\mathcal{O}_K^{60^\circ}(R)\right) = \mathcal{O}_M^{60^\circ}(A) = Q$$

oraz

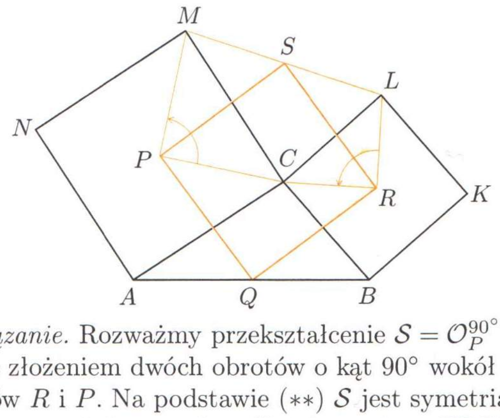
$$\mathcal{O}_O^{120^\circ}(Q) = \mathcal{O}_L^{60^\circ}\left(\mathcal{O}_M^{60^\circ}(Q)\right) = \mathcal{O}_L^{60^\circ}(C) = P.$$

Stąd natychmiast wynika, że trójkąt PQR jest równoboczny i jego środkiem ciężkości jest punkt O. Pozostaje wykazać, iż S leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR. W tym celu, ponieważ

$$\sphericalangle XSY = \sphericalangle YSZ = \sphericalangle ZSX = 120°$$

oraz P, Q, R należą odpowiednio do prostych SX, SY, SZ, wystarczy zauważyć, że S nie jest punktem wewnętrznym trójkąta PQR. W przeciwnym razie, boki trójkąta PQR są widziane z punktu S pod kątem $120°$, a więc $S = O$. Wtedy punkt O leży na zewnątrz okręgów opisanych na „dobudowanych" na początku trójkątach równobocznych. Oznacza to, że każdy z kątów AOB, BOC, COA ma miarę mniejszą od $120°$, co jest niemożliwe.

Zadanie 4. Boki BC i AC trójkąta ABC są jednocześnie bokami kwadratów $BKLC$ i $CMNA$ (leżących na zewnątrz trójkąta ABC). Punkty Q i S są odpowiednio środkami odcinków AB i LM, a P i R środkami kwadratów $CMNA$ i $BKLC$. Wykazać, że czworokąt $PQRS$ jest kwadratem.



Rozwiązanie. Rozważmy przekształcenie $\mathcal{S} = \mathcal{O}_P^{90^\circ} \circ \mathcal{O}_R^{90^\circ}$ będące złożeniem dwóch obrotów o kąt $90°$ wokół punktów R i P. Na podstawie (**) $\mathcal{S}$ jest symetrią środkową względem punktu X, takiego że $\sphericalangle XRP = 45°$, $\sphericalangle XPR = -45°$. Z drugiej strony zauważmy, że

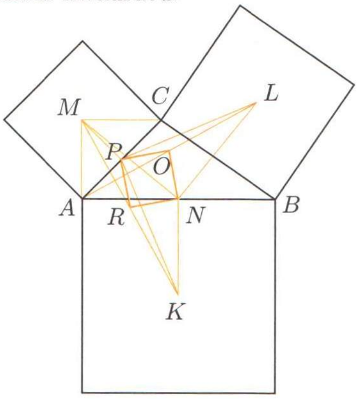
$$\mathcal{S}(L) = \mathcal{O}_P^{90^\circ}\left(\mathcal{O}_R^{90^\circ}(L)\right) = \mathcal{O}_P^{90^\circ}(C) = M.$$

Tak więc środek X symetrii $\mathcal{S}$ pokrywa się ze środkiem S odcinka LM. W szczególności PRS jest równoramiennym trójkątem prostokątnym. Rozważając analogicznie złożenie obrotów $\mathcal{O}_R^{90^\circ} \circ \mathcal{O}_P^{90^\circ}$, dowodzimy, że PQR jest również równoramiennym trójkątem prostokątnym. Tak więc czworokąt $PQRS$ jest kwadratem.

Zadanie 5. Punkty K, L, M są środkami kwadratów zbudowanych zewnętrznie na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC. Wykazać, że

(a) odcinki KM i AL są prostopadłe,

(b) środki odcinków AB, AL, AC i MK są wierzchołkami kwadratu.



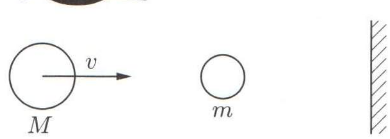
Rozwiązanie. Przez N, O, P i R oznaczmy kolejno środki odcinków AB, AL, AC i KM.

(a) Na podstawie zadania 4 stwierdzamy, że MNL jest prostokątnym trójkątem równoramiennym, przy czym $\sphericalangle LNM = 90°$. Zauważmy, że $\mathcal{O}_N^{90°}(A) = K$ oraz $\mathcal{O}_N^{90°}(L) = M$. Tak więc $\mathcal{O}_N^{90°}(AL) = KM$. W szczególności odcinki AL i KM są prostopadłe.

(b) Z (**) wiemy, że $\mathcal{O}_N^{90°} \circ \mathcal{O}_P^{90°}$ jest symetrią środkową $\mathcal{S}_X$. Ponieważ $\mathcal{O}_N^{90°} \circ \mathcal{O}_P^{90°}(M) = K$, więc środek X tej symetrii pokrywa się ze środkiem R odcinka KM. Ponadto z (*) wynika również, że PRN jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Z zadania 4 wynika, że $\sphericalangle KPL = 90°$ oraz $PK = PL$. Tak więc $\mathcal{O}_P^{90°} \circ \mathcal{O}_N^{90°}(A) = L$. Stąd $\mathcal{O}_P^{90°} \circ \mathcal{O}_N^{90°}$ jest symetrią środkową względem środka O odcinka AL oraz tak jak poprzednio NOP jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Ostatecznie czworokąt $NOPR$ jest kwadratem.

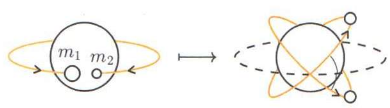
Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



Rys. 1

F 629. Kula o masie M porusza się w kierunku kuli o masie m, za którą stoi ściana (rys. 1). Jaki musi być stosunek mas kul, aby obie kule zderzyły się dokładnie dwa razy?
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

F 630. Na orbicie kołowej o promieniu R wokół planety o masie M zderzają się dwa ciała o masach m_1 i m_2. W wyniku zderzenia powstają dwa ciała o jednakowych masach, poruszające się po orbitach kołowych o tym samym promieniu, lecz nachylonych pod kątem 45° do orbity początkowej (rys. 2). Jaki był stosunek mas ciał m_1 i m_2 i jaka energia wydzieliła się podczas zderzenia?
Rozwiązanie na str. 16

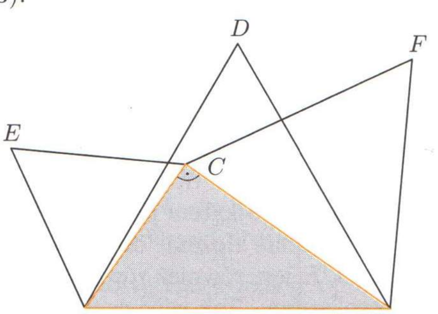
Redaguje Waldemar POMPE

M 1075. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita n, dla której liczba

$$n^2 + n - 1$$

jest podzielna przez 25.
Rozwiązanie na str. 9

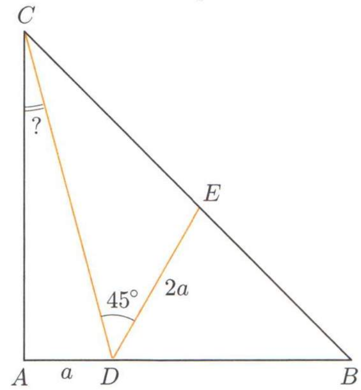
M 1076. Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC budujemy, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ACE i BCF. Ponadto na przeciwprostokątnej AB budujemy trójkąt równoboczny ABD przy czym C i D leżą po tej samej stronie prostej AB (rys. 3).



Rys. 3

Wykazać, że pole trójkąta ABC jest równe polu czworokąta $ECFD$.
Rozwiązanie na str. 3

M 1077. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC ($AB = AC$, rys. 4) punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i BC, przy czym $\sphericalangle CDE = 45°$ oraz $DE = 2 \cdot AD$. Wyznaczyć miarę kąta ACD.



Rys. 4

Rozwiązanie na str. 9