Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 XII 2004

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
475 ($WT = 1{,}28$) i **476** ($WT = 2{,}88$)
z numeru 2/2004

Jerzy Cisło	– Wrocław	45,14
Józef Siwy	– Łaziska Górne	43,54
Witold Bednarek	– Łódź	40,04
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	39,73
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	39,64
Michał Kieza	– Warszawa	38,49
Michał Jóźwikowski	– Błonie	38,07
Janusz Olszewski	– Suwałki	37,90
Andrzej Daniluk	– Kraków	34,80

Mamy kolejnego Weterana. Pan Jerzy Cisło zalicza „44" po raz trzeci i zostaje dwudziestym siódmym Weteranem Klubu 44 M.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 487, 488

Redaguje Marcin E. KUCZMA

487. Wyznaczyć wszystkie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, mające ciągłą pochodną f' i spełniające nierówność $f'(x) \geqslant \big(f(x)\big)^2$ dla $x \geqslant 0$.

488. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele układów 23 kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 488 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2004

Przypominamy treść zadań:

483. Wykonujemy ciąg rzutów symetryczną monetą. Kończymy rzucanie, gdy po serii złożonej z nieparzystej liczby orłów pojawi się reszka. Obliczyć wartość oczekiwaną wykonanej liczby rzutów.

484. Dane są liczby naturalne m, n, przy czym $m \geqslant n$, oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_m$ spełniające warunki

$$1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_m \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n.$$

Udowodnić nierówność $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$.

483. Rozważana zmienna losowa

$$X = \text{liczba wykonanych rzutów}$$

przyjmuje wartość $n{+}2$ (dla $n \geqslant 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy w ostatnim rzucie była reszka, w przedostatnim orzeł, a wcześniej zaszło zdarzenie

A_n : wykonano n rzutów i orły występowały tylko w blokach długości parzystej.

Zatem $\mathrm{P}(X = n{+}2) = \frac{1}{4}p_n$, gdzie $p_n = \mathrm{P}(A_n)$.

Zdarzenie A_n jest sumą następujących dwóch rozłącznych zdarzeń:

zaszło zdarzenie A_{n-1}, potem była reszka;

zaszło zdarzenie A_{n-2}, potem były dwa orły.

Stąd wynika zależność rekurencyjna

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$$

z oczywistymi warunkami początkowymi

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{2}.$$

Stosując zwykły algorytm rozwiązywania równań rekurencyjnych (lub zauważając, że $(2^n p_n)$ jest ciągiem Fibonacciego), znajdujemy wzór jawny

$$p_n = \frac{2(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\sqrt{5}}; \qquad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej X jest równa

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\cdot\frac{1}{4}p_n = \frac{1}{4}\sum_{m=2}^{\infty} m p_{m-2} = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{2\sqrt{5}},$$

gdzie

$$f(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m x^{m-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{m=2}^{\infty} x^m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{x^2}{1-x}\Big) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

dla $x \in (-1;1)$. Podstawiając $x = \alpha$, $x = \beta$ otrzymujemy z poprzedniej równości wynik: $E(X) = 6$.

484. Oznaczmy

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad t_k = \sum_{i=1}^{k} x_i^2.$$

Mamy dowieść, że $s_n \geqslant t_m$. Przekształcamy różnicę $t_m - t_{n-1}$:

$$t_m - t_{n-1} = \sum_{i=n}^{m} x_i^2 \leqslant \sum_{i=n}^{m} x_n x_i = x_n(s_m - s_{n-1}) \leqslant$$
$$\leqslant x_n(n - s_{n-1});$$

skorzystaliśmy z założenia, że $s_m \leqslant n$. Stąd otrzymujemy

$$s_n - t_m \geqslant s_n - t_{n-1} - x_n(n - s_{n-1}) =$$
$$= (s_{n-1} + x_n) - t_{n-1} - x_n(n - s_{n-1}) =$$
$$= (x_n + 1)s_{n-1} - (n-1)x_n - t_{n-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\big((x_n + 1)x_i - x_n - x_i^2\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_n)(1 - x_i) \geqslant 0.$$

Zatem dowodzona nierówność $s_n \geqslant t_m$ istotnie zachodzi.

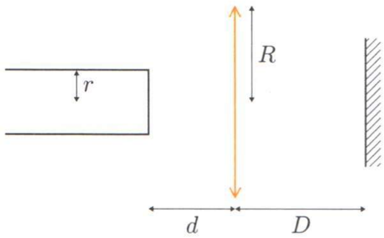
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2004

Zadania z fizyki nr 384, 385

Redaguje Jerzy B. BROJAN

384. Na podstawie następujących danych:
a) promień orbity Księżyca wokół Ziemi $R_k = 380\,000$ km,
b) promień Ziemi $r = 6\,400$ km,
c) przyspieszenie ziemskie g i długość roku (powszechnie znane...),
oraz wiedząc, że pływy wywoływane przez Księżyc są około dwóch razy wyższe od wywoływanych przez Słońce, ocenić przybliżoną wartość stosunku masy Księżyca do masy Ziemi.



385. Powierzchnia bardzo długiego walca o promieniu $r = 1$ cm wysyła światło. W odległości $d = 10$ cm od końca walca znajduje się przesłona z kołowym otworem o promieniu $R = 3$ cm, przy czym oś walca przechodzi przez środek otworu prostopadle do przesłony (rys.). Jaka powinna być ogniskowa f soczewki wypełniającej otwór, aby jasny krąg na ekranie odległym o $D = 15$ cm od przesłony był jak najmniejszy?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
374 ($WT = 1{,}57$) i **375** ($WT = 1{,}82$)
z numeru 3/2004

Tomasz Rudny	– Warszawa	31,47
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	28,36
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	22,20
Tomasz Wietecha	– Tarnów	19,44
Jerzy Witkowski	– Radlin	13,12
Piotr Kumor	– Olsztyn	11,01

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2004

Przypominamy treść zadań:

380. Dwie kulki upuszczono w odstępie czasu t z tej samej wysokości h. Kulki poruszają się wzdłuż prostej pionowej i zderzają się doskonale sprężyście, a dolna odbija się doskonale sprężyście od podłoża. Jeśli masa dolnej kulki wynosi 1, górnej – 0,7, a ich promienie są znacznie mniejsze od h, to jak wybrać t, aby górna kulka wzniosła się jak najwyżej
a) po pierwszym zderzeniu z dolną kulką?
b) po drugim zderzeniu z dolną kulką?
c) po trzecim zderzeniu z dolną kulką?
Jaką maksymalną wysokość może osiągnąć górna kulka po dowolnej liczbie zderzeń? Odpowiedzi mogą opierać się na eksperymentach komputerowych (dotyczy to zwłaszcza ostatnich dwóch pytań).

381. Okres połowicznego rozpadu izotopu potasu ^{40}K wynosi $1{,}26 \cdot 10^9$ lat, przy czym z prawdopodobieństwem 11% następuje wychwyt elektronu i przemiana w ^{40}Ar. Zakładając, że w okresie powstawania Ziemi temperatura była tak wysoka, że helowce „wyparowały" (uciekły w przestrzeń kosmiczną) i wiedząc, że obecnie stosunek liczby atomów ^{40}Ar na Ziemi do liczby atomów ^{40}K wynosi 0,9, ocenić wiek Ziemi.

380. a) Zderzenie nastąpi po odbiciu dolnej kulki od podłoża. Oznaczmy wysokość miejsca zderzenia przez h', a masy kulek przez m (górna) i M (dolna). Tuż przed zderzeniem górna kulka porusza się z prędkością

$$u = \sqrt{2g(h-h')}$$

w dół, a dolna – z tą samą (co do wartości bezwzględnej) prędkością u do góry. Stosując do zderzenia zasady zachowania pędu i energii wyznaczamy prędkość górnej kulki po zderzeniu – jest ona skierowana w górę i równa

$$v = \frac{3M-m}{M+m},$$

a stąd maksymalne wzniesienie tej kulki wynosi

$$h_m = h' + \left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2 (h-h').$$

Dla $m < M$ maksymalna wartość h_m jest osiągana wtedy, gdy zderzenie kulek nastąpi jak najniżej ($h' = 0$). Oznacza to, że t powinno być jak najmniejsze. Przy podanych wartościach liczbowych M i m wyliczamy

$$h_{\max} = 1{,}830\ h.$$

b) Po sprawdzeniu wszystkich możliwości okazuje się, że najkorzystniej jest wybrać t nieznacznie mniejsze od

$$2\sqrt{2h/g},$$

tak że pierwsze zderzenie nastąpi tuż po puszczeniu górnej kulki, a drugie – tuż po odbiciu dolnej kulki od podłoża. Wtedy drugie zderzenie będzie identyczne z opisanym w punkcie a), a maksymalna wysokość wzniesienia górnej kulki będzie równa wartości poprzednio wyliczonej.

c) Analiza numeryczna wskazuje, że najkorzystniejszy jest wybór

$$t = 0{,}047435\sqrt{h/g}.$$

Wtedy po pierwszym zderzeniu kulek następuje dwukrotne odbicie dolnej od podłoża, po czym drugie zderzenie następuje tuż przed spadkiem dolnej kulki, na bardzo małej wysokości. W ciągu bardzo krótkiego czasu nastąpi odbicie dolnej kulki i trzecie zderzenie, po którym górna kulka wzniesie się na wysokość $2{,}353\,h$.
Dla dowolnej liczby zderzeń eksperymenty komputerowe wykazują, że energia górnej kulki może osiągnąć wartość dowolnie bliską górnej granicy, odpowiadającej stanowi spoczynku dolnej kulki. Maksymalna wysokość górnej wyniesie wtedy

$$\frac{M+m}{m} h = 2{,}429\ h.$$

(Jeśli Czytelnicy pragną się o tym przekonać, proponujemy wybrać $t = 0{,}2\sqrt{h/g}$ i zobaczyć, co się stanie po około 40 i po około 230 odbiciach i zderzeniach).

381. Jeśli początkową liczbę atomów ^{40}K oznaczymy przez N_0, czas połowicznego rozpadu przez $T_{1/2}$, a wiek Ziemi przez T, to obecnie pozostało $N_0 \cdot 2^{-T/T_{1/2}}$ atomów ^{40}K. Liczba powstałych jąder ^{40}Ar wynosi

$$0{,}11 N_0 (1 - 2^{-T/T_{1/2}}),$$

a rozwiązując równanie

$$0{,}11 \cdot (1 - 2^{-T/T_{1/2}}) = 0{,}9 \cdot 2^{-T/T_{1/2}},$$

znajdujemy

$$T = 3{,}2\ T_{1/2} \approx 4 \text{ mld lat}.$$