Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 2004

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **473** ($WT = 3{,}70$) i **474** ($WT = 1{,}12$) z numeru 1/2004

Józef Siwy	– Łaziska Górne	43,54
Jerzy Cisło	– Wrocław	40,98
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	39,64
Witold Bednarek	– Łódź	38,76
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	38,45
Michał Jóźwikowski	– Błonie	38,07
Janusz Olszewski	– Suwałki	37,90
Michał Kieza	– Warszawa	37,21
Andrzej Daniluk	– Kraków	34,80

Tabelę otwiera pan Siwy. Czytelnikom, którzy śledzą ruch w czołówce Ligi i których może dziwić pojawienie się tego nazwiska wyjaśniamy, że wyszło ono „z cienia" po trzynastoletnim okresie braku aktywności (przy stanie konta 42,42).

Zadania z matematyki nr 485, 486

Redaguje Marcin E. KUCZMA

485. Obliczyć maksymalną liczbę krawędzi, jaką może mieć graf o 10 wierzchołkach, niezawierający czteroelementowego cyklu (tj. takiej czwórki wierzchołków a, b, c, d, że ab, bc, cd, da są krawędziami grafu).

486. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $|\sphericalangle BAC| = 180° - |\sphericalangle BDC|$. Udowodnić, że na krawędzi BC istnieje dokładnie jeden punkt P, dla którego zachodzi równość

$$\frac{|AP|}{|BD|\cdot|CD|} + \frac{|DP|}{|BD|\cdot|CD|} = \frac{|AB|}{|BC|\cdot|BD|} + \frac{|AC|}{|BC|\cdot|CD|}.$$

Zadanie 486 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2004

Przypominamy treść zadań:

481. Niech S_p oznacza symetrię płaszczyzny względem prostej p. Scharakteryzować te trójki różnych prostych (k, ℓ, m), dla których złożenie $f = S_m \circ S_\ell \circ S_k$ jest tym samym przekształceniem, co złożenie $g = S_k \circ S_m \circ S_\ell$.

482. Dana jest liczba naturalna $n > 1$. Liczba dodatnia a jest pierwiastkiem wielomianu $x^n - x - 1$; liczba dodatnia b jest pierwiastkiem wielomianu $x^{2n} - x - 3a$. Rozstrzygnąć, w zależności od n, która z liczb a, b jest większa.

481. Przepisujemy postulowany warunek w postaci $F \circ S_k = S_k \circ F$, gdzie F jest złożeniem $F = S_m \circ S_\ell$. Proste ℓ i m są różne, więc F nie jest identycznością. Gdy są równoległe, F jest przesunięciem o pewien niezerowy wektor $\mathbf{v}$, prostopadły do ℓ i m. Gdy proste ℓ i m przecinają się pod kątem α, F jest obrotem wokół ich punktu przecięcia o kąt 2α (odpowiednio skierowany).

W pierwszym przypadku ($\ell \parallel m$, F – przesunięcie) wybieramy na prostej k dowolny punkt P, oznaczamy $F(P) = Q$, $S_k(Q) = Q'$ i widzimy, że Q i Q' są obrazami punktu P w przekształceniach $F \circ S_k$ oraz $S_k \circ F$. Te obrazy mają się pokrywać; a to znaczy, że Q jest punktem prostej k, czyli wektor przesunięcia $\mathbf{v}$ jest równoległy do k. Skoro zaś $\mathbf{v} \perp \ell$, $\mathbf{v} \perp m$, to równość $F \circ S_k = S_k \circ F$ jest (w rozważanym przypadku) możliwa tylko wtedy, gdy

(1) $\qquad \ell \perp k \perp m.$

W drugim przypadku (ℓ, m przecinają się, F – obrót wokół punktu przecięcia O) patrzymy najpierw na obrazy punktu O w przekształceniach $F \circ S_k$ oraz $S_k \circ F$; pokryją się one tylko wtedy, gdy $O \in k$, więc do takiej sytuacji ograniczamy dalsze rozważanie. Wybieramy teraz na prostej k dowolny punkt P, różny od O, i oznaczamy $F(P) = Q$, $S_k(Q) = Q'$. Jak poprzednio, Q i Q' są obrazami P w przekształceniach $F \circ S_k$ oraz $S_k \circ F$; powinny się pokrywać, a więc punkt Q musi leżeć na k, czyli kąt obrotu ma być półpełny – czyli kąt między prostymi ℓ i m musi być prosty. Zatem (w rozważanym przypadku) równość $F \circ S_k = S_k \circ F$ jest możliwa tylko wtedy, gdy

(2) $\qquad \ell \perp m;\quad$ prosta k współpękowa z ℓ i m.

Nietrudno się przekonać, że w każdej z sytuacji, opisanych przez warunki (1) i (2), badana równość $F \circ S_k = S_k \circ F$ rzeczywiście jest spełniona.

482. Liczby $a, b > 0$ spełniają równości $a^n = a + 1$, $b^{2n} = b + 3a$. Widać, że $a \neq 1$, a więc $(a+1)^2 > 4a$. Gdyby zachodziła nierówność $b \geqslant a$ (czyli $b/a \geqslant 1$), to mielibyśmy

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \geqslant \frac{b}{a} = \frac{4b}{4a} \geqslant \frac{b+3a}{4a} > \frac{b+3a}{(a+1)^2} = \frac{b^{2n}}{a^{2n}}$$

– sprzeczność. Zatem $a > b$ (niezależnie od n).

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2004

UWAGA!
ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

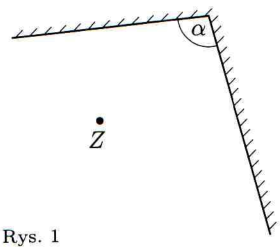
Zadania z fizyki nr 382, 383

Redaguje Jerzy B. BROJAN

382. Odległość między osiami przednich i tylnych kół samochodu jest równa 1,9 m, a odległość lewych kół od prawych – 1,5 m. Samochód ma napęd na 2 tylne koła, przy czym opona na jednym z tych dwóch kół jest „łysa” – współczynnik tarcia tego koła o podłoże jest równy 0,2, a dla pozostałych kół wynosi 0,8. Z jakim maksymalnym przyspieszeniem może ten samochód ruszyć po linii prostej bez poślizgu, jeśli wszystkie koła są wtedy jednakowo obciążone?

(Autor znalazł rozwiązanie jedynie na drodze obliczeń numerycznych – może jednak istnieje też rozwiązanie analityczne? Przekonamy się po przejrzeniu listów Czytelników.)

383. Do małego izotropowego źródła światła Z przysunięto zestaw dwóch zwierciadeł płaskich (rys. 1). Ile razy zwierciadła zwiększają natężenie oświetlenia odległego ekranu, jeśli kąt α między nimi jest równy: a) 91°, b) 90°, c) 89°? Rozważyć tylko część ekranu najbliższą źródła i przyjąć, że prosta przechodząca przez wierzchołek kąta i źródło jest prostopadła do ekranu.

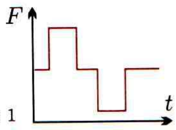


Rys. 1

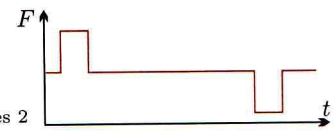
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2004

Przypominamy treść zadań:

378. Człowiek stoi w windzie na wadze sprężynowej. Kiedy winda przejechała jedno piętro w górę, wskazania wagi zmieniały się według wykresu 1. Ile pięter przejedzie winda, jeśli przebieg wskazań wagi będzie opisany wykresem 2?



Wykres 1



Wykres 2

379. Pewna cienka soczewka ma w powietrzu ogniskową $f = 30$ cm, a w wodzie (współczynnik załamania $n_1 = 1{,}33$) – ogniskową $f_1 = 100$ cm.

a) Ile wynosi ogniskowa tej soczewki w oleju o współczynniku załamania $n_2 = 1{,}45$?

b) Czy otrzymany wynik jest poprawny również wtedy, gdy soczewka jest w rzeczywistości zestawem sklejonych soczewek?

378. Oznaczmy przez t_a czas rozpędzania lub hamowania windy, przez t_1 czas ruchu jednostajnego na pierwszym wykresie, a przez t_2 – na drugim. Odpowiednie drogi przebyte przez windę są dane wzorami

$$s_a = (1/2)at_a^2,$$
$$s_1 = vt_1 = at_at_1,$$
$$s_2 = at_at_2,$$

gdzie a jest przyspieszeniem windy. Wysokość piętra jest równa

$$S_1 = 2s_a + s_1 = at_a(t_a + t_1),$$

a całkowita droga na drugim wykresie

$$S_2 = 2s_a + s_2 = at_a(t_a + t_2).$$

Z porównania wykresów widać, że $t_a + t_2$ jest czterokrotnie większe od $t_a + t_1$, zatem winda przejedzie cztery piętra.

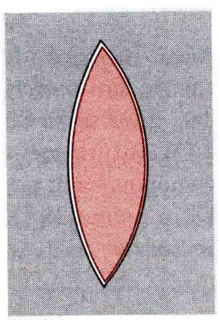
379. a) Należy posłużyć się wzorami

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad \frac{1}{f_1} = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad \frac{1}{f_2} = \left(\frac{n}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Po wyeliminowaniu współczynnika załamania szkła n oraz promieni krzywizny R_1 i R_2 możemy wyrazić szukaną ogniskową f_2 przez wielkości dane:

$$f_2 = \frac{ff_1n_2(n_1 - 1)}{f_1(n_1 - n_2) + fn_1(n_2 - 1)} = 241 \text{ cm}.$$

b) Tak. Aby to wykazać, wprowadźmy bardzo cienkie warstwy powietrza oddzielające soczewkę od otaczającej ją cieczy (rys. 2). W takiej sytuacji oczywiste jest, że wewnętrzna budowa soczewki nie ma znaczenia i dowolnie skomplikowany zestaw można zastąpić jedną soczewką o tych samych zewnętrznych promieniach krzywizny i współczynniku załamania tak dobranym, aby w powietrzu jej ogniskowa była równa f. Wtedy powyższe wzory będą prawidłowe. Następnie możemy przejść z grubością warstw powietrza do zera, co nie zmieni biegu promieni.



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **372** ($WT = 2{,}50$) i **373** ($WT = 3{,}80$) z numeru 2/2004

Andrzej Idzik ‘	– Bolesławiec	24,97
Tomasz Wietecha	– Tarnów	19,44
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	18,81