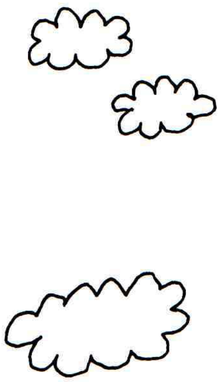
Eksperymenty przy urnie

Bolesław KOPOCIŃSKI

Trudny wybór. W numerze 3 *Delty* z 1989 roku (B. Kopociński, *Losowanie ze wspomaganiem*) rozważa się problem wyboru reprezentacji pewnej społeczności, któremu teraz nadajemy następującą postać.

Cztery *cyfry* 1, 2, 3, 4 i sześć *liter* A, B, C, D, E, T chcą zgodnie wybrać pięcioelementową reprezentację. Rozwiązywanie zadania utrudnia T, które żąda dla siebie bezwarunkowo miejsca w reprezentacji. Na żądanie T godzą się *litery*, odmawiają natomiast *cyfry*.



Jest wiele sposobów przeprowadzenia wyborów w zaistniałej sytuacji. Narzuca się dwustopniowy schemat urnowy, w którym najpierw losuje się jednostki z urny pojedynczo bez zwracania i na tym kroku poprzestaje, jeśli T wylosuje udział. W przeciwnym razie wybrane *litery* losują spośród siebie jedną, która ustąpi miejsca T.

Ten sposób losowania przynosi spory dyskomfort dla *litery*, która odstępuje miejsca T. Tego można uniknąć, np. sporządzając sześć list i dokonując dwóch losowań. Np. owymi listami są:

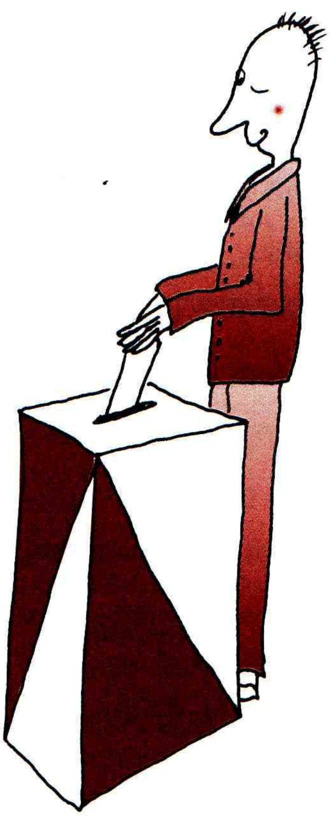
$$(1234T),\ (ABCDT),\ (ABCET),\ (ABDET),\ (ACDET),\ (BCDET).$$

Teraz najpierw rzucamy monetą: jeśli wypadnie *orzeł*, to do reprezentacji wchodzi pierwsza lista, w przeciwnym razie losuje się jedną z pozostałych list z jednakowymi prawdopodobieństwami. Odnotujmy, że wtedy reprezentacja oprócz T zawiera albo *cyfry*, albo *litery*.

Przewaga *cyfr* w reprezentacji. W powszechnym mniemaniu wybory uważa się za demokratyczne, jeśli każda jednostka ma takie samo prawo być wybranym. Ostatni schemat losowania nasuwa jednak wątpliwości, czy nasza reprezentacja, jakkolwiek wybrana demokratycznie, jest *reprezentatywna*, tzn. odzwierciedla skład społeczności. Ten problem prześledzimy na tym samym przykładzie, ale już bez komplikacji wywołanej żądaniem T. Niech X oznacza liczbę *cyfr* w reprezentacji. Przy pojedynczym losowaniu z urny bez zwracania mamy prawdopodobieństwa

$$\mathrm{P}(X=4) = 5\cdot\frac{6\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6} = 0{,}02,$$
$$\mathrm{P}(X=3) = 10\cdot\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot6}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6} = 0{,}24,$$
$$\mathrm{P}(X\geqslant3) = 0{,}26.$$

Sprawdzenie, czy ten wynik jest poprawny, zostawiamy Czytelnikowi.



Widzimy, że przewaga *cyfr* zdarza się stosunkowo często. Łatwo zaproponować losowanie demokratyczne, w którym prawdopodobieństwo przewagi *liter* w reprezentacji osiągnie $1/2$. Sporządzamy dwie listy $(1234A)$ i $(BCDET)$ i losujemy jedną z nich rzucając monetą.

Z pewnym zaskoczeniem możemy sprawdzić, że prawdopodobieństwo przewagi *cyfr* maksymalnie może osiągnąć $2/3$. Realizujemy je, tworząc sześć list po pięć elementów:

$$(123AB),\ (124CD),\ (134ET),\ (234AB),\ (ACDET),\ (BCDET).$$

Cyfry mają tu przewagę na czterech spośród sześciu list. Do reprezentacji losujemy jedną, każdą z prawdopodobieństwem $1/6$. Ponieważ każda jednostka na listach występuje trzy razy, więc losowanie jest demokratyczne.

Przewaga *liter*. *Litery* mające większość w społeczności nie powinny jednak zaniedbywać pracy nad ordynacją wyborczą. Losowanie nazywamy proporcjonalnym, jeśli społeczność dzielimy na warstwy: tutaj *cyfr* i *liter*, a ogólną liczbę wybieranych jednostek dzielimy proporcjonalnie na warstwy. Osobno losujemy z pierwszej warstwy dwie *cyfry*, a z drugiej trzy *litery*. To daje przewagę *literom* w każdej reprezentacji.