O wielościanach większych i mniejszych

Adam PIWOCKI

O wielościanach foremnych słyszeliśmy w szkole, a niektórzy z nas nawet pamiętają, ile ich jest. Już w starożytności Platon udowodnił, że *wypukłych wielościanów foremnych jest dokładnie pięć*. Stąd często mówi się o nich *bryły platońskie*. Chodziło mu, oczywiście, o bryły trójwymiarowe, których ściany są wielokątami foremnymi, a naroża są przystające. Jednak Platonowi do głowy nie przyszło, że wielościany mogą mieć swoje odpowiedniki w innych wymiarach, więc tym bardziej nie udało mu się ich policzyć. Spróbujmy to zrobić za niego.

Najpierw sprecyzujemy, czym się będziemy zajmować. W wypukłym wielościanie foremnym wszystkie ściany muszą być takimi samymi wielokątami foremnymi i kąty między dowolnymi parami sąsiednich ścian muszą być takie same. Przykładem pospolitym jest sześcian, czyli kostka (choć bez kropek na ścianach). Tu każda ściana jest kwadratem, a kąt między sąsiednimi ścianami jest prosty. Sześcianami można wypełnić całą przestrzeń trójwymiarową, tak jak płaszczyznę da się pokryć kwadratami. Porównanie jest nieprzypadkowe, bo właśnie kwadrat jest dwuwymiarowym odpowiednikiem sześcianu. A kwadrat to przecież cztery odcinki równej długości z kątem prostym między nimi. Mamy więc jeden dwuwymiarowy „wielościan", a inne?

Czworościan to piramida o trójkątnej podstawie, w której wszystkie krawędzie (trzy podstawy i trzy boczne) są równej długości, a jego „młodszy brat" z płaszczyzny to, oczywiście, trójkąt równoboczny. Stąd pomysł, że za niżejwymiarowy wielościan przyjmujemy wypukłą figurę płaszczyzny, której wszystkie boki są równej długości, a kąty między nimi takie same. Dostajemy wielokąty foremne. Takich jest bardzo dużo, bo dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje n-kąt foremny. Ale o tym Platon wiedział.

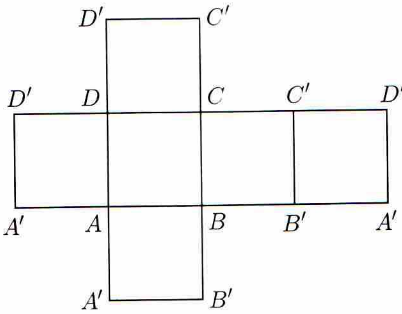
Jeżeli środek każdego boku n-kąta połączymy ze środkami sąsiednich boków, to otrzymamy figurę *dualną* do pierwotnego n-kąta, będącą zresztą też n-kątem, ale mniejszym. Czy możemy tak postąpić z wielościanami? Jeżeli połączymy środki wszystkich ścian czworościanu foremnego, to otrzymamy mniejszy czworościan. Ale ten sam zabieg wykonany na sześcianie da nam ośmiościan foremny, a wykonany drugi raz daje znowu sześcian. Są to więc bryły wzajemnie dualne. Podobnie dualne są dwunastościan i dwudziestościan.

Teraz poszukamy wyżejwymiarowych członków wielościanowego bractwa. Zaczniemy od najprostszego przedstawiciela. Aby zbudować trójkąt równoboczny, musimy mieć trzy odcinki równej długości, do obu końców jednego z nich przyczepiamy pozostałe dwa. To możemy zrobić na prostej, ale w następnym kroku wyginamy skrajne odcinki, aż się spotkają, tworząc trójkąt. Podobnie tworzymy czworościan: do wszystkich trzech boków trójkąta równobocznego doklejamy po jednym trójkącie, które następnie podnosimy z płaszczyzny, aż się spotkają przy wierzchołku.

Idźmy za ciosem i do każdej ściany czworościanu (podstawy) doklejmy po jednym czworościanie. To się na razie mieści w trzech wymiarach. Teraz „wyginamy" z przestrzeni (??) wszystkie cztery czworościany boczne, aż się spotkają przy wspólnym wierzchołku. Tak otrzymaliśmy *pięciobrył foremny*. W każdym z pięciu wierzchołków schodzą się cztery czworościany, a figurą dualną, powstałą z połączenia środków wszystkich czworościanów, jest też pięciobrył.

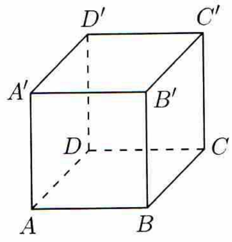
Jeżeli zdefiniujemy *wypukły wielobrył foremny* tak: jest to *figura wypukła, której wszystkie trójwymiarowe „ściany" są takimi samymi wielościanami foremnymi oraz wszystkie kąty między sąsiednimi wielościanami są takie same*, to zobaczymy (?), że pięciobrył jest tego dobrym przykładem (o ile wiemy, jak mierzyć kąty między wielościanami). Ale pójdźmy dalej: możemy jeden pięciobrył oblepić pięcioma innymi, wygiąć je i otrzymać coś, co mieści się dopiero w pięciu wymiarach. Możemy więc zdefiniować n-wymiarowy wielościan foremny tak, że jego „ściany" są $(n-1)$-wymiarowymi wielościanami. W najprostszym przypadku jest to n-sympleks, tzn. trójkąt to 2-sympleks, czworościan to 3-sympleks, pięciobrył to 4-sympleks, itd. Wszystkie są samodualne.

Inną nieskomplikowaną figurą jest kwadrat, który powstaje z przesuwania odcinka w kierunku prostopadłym do prostej, na której leży. Podobnie, jeśli będziemy przesuwać kwadrat prostopadle do zawierającej go płaszczyzny, to otrzymamy sześcian. I dalej: przesuńmy sześcian w kierunku prostopadłym do zawierającej go przestrzeni i dostaniemy hiperkostkę. A co to jest? Figura złożona z ośmiu sześcianów, po cztery w każdym wierzchołku. A jak to wygląda? Ma dwie równoległe podstawy-sześciany i sześć bocznych sześcianów. A jak to zobaczyć? Zwykły sześcian można zrobić za pomocą dwuwymiarowej siatki, np. w kształcie krzyża złożonego z sześciu kwadratów (rys. 1a).



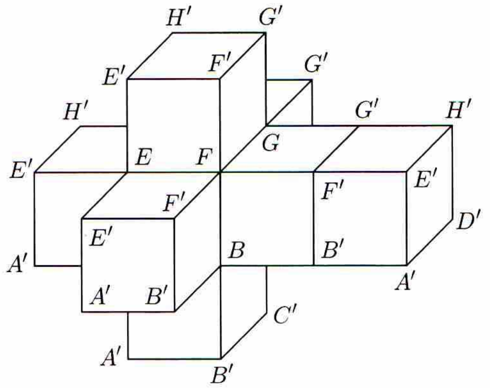
Rys. 1a

Odpowiednio sklejając boki kwadratów, dostajemy kostkę (rys. 1b).



Rys. 1b

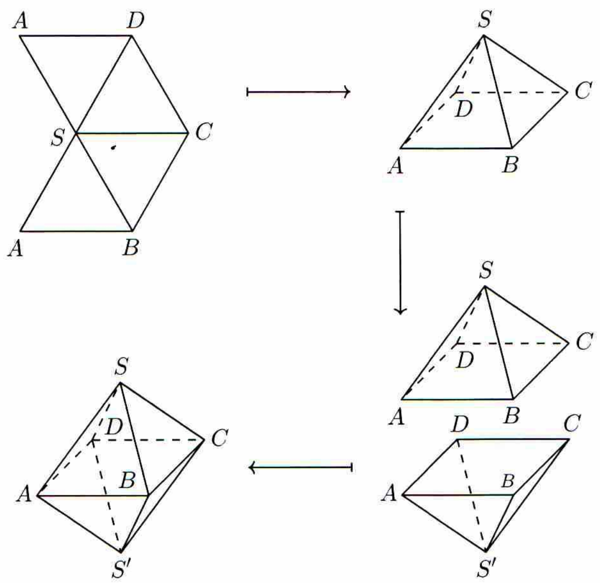
Podobnie możemy wykonać trójwymiarową siatkę złożoną z ośmiu sześcianów, zwaną *tesseraktem.*



Rys. 2

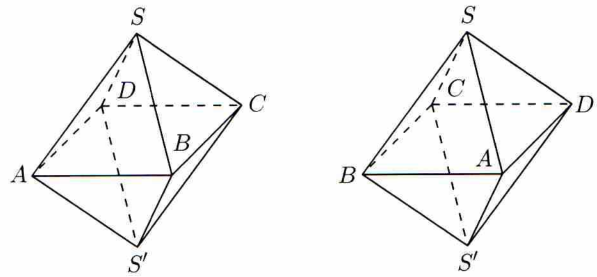
Teraz trzeba tylko odpowiednio posklejać sześciany wzdłuż kwadratów i hiperkostka gotowa.

Ale dlaczego mielibyśmy na tym poprzestać? Czemu nie popychać powstałej hiperkostki w jeszcze innym kierunku, tworząc hiperhiperkostkę? Można tak dowolnie wiele razy, a to, co dostaniemy po n takich ruchach, to kostka n-wymiarowa, którą oznaczamy I^n, i która jest ścianą w kostce $(n+1)$-wymiarowej. Dosyć? A skądże! Przecież sześcian ma bryłę dualną – ośmiościan. Podobnie, jeśli połączymy środki wszystkich ośmiu sześcianów w hiperkostce, to dostaniemy coś, co ma osiem wierzchołków. Jest to *szesnastobrył foremny*, zbudowany z szesnastu czworościanów, po osiem w każdym wierzchołku. Oczywiście, środki tych czworościanów wyznaczają wierzchołki hiperkostki. Konstrukcja nie powinna być za trudna. Aby otrzymać zwykły ośmiościan, można skleić dwie piramidy wzdłuż kwadratowych podstaw.



Rys. 3

Wykonujemy na płaszczyźnie siatkę z czterech trójkątów równobocznych (rys. 3) i sklejając dwie krawędzie, dostajemy piramidę, której podstawa $ABCD$ nadal leży w jednej płaszczyźnie. Podstawa niby jest kwadratem, ale tak naprawdę jest figurą dualną do kwadratu. Łączymy z drugą piramidą i mamy ośmiościan. Podobnie, w trzech wymiarach robimy siatkę z ośmiu czworościanów. Po sklejeniu odpowiednich ścian w przestrzeni pozostanie podstawa w kształcie ośmiościanu, wzdłuż którego doklejamy drugą taką figurę (rys. 4).



Rys. 4

(Topolodzy zauważą, że ośmiościan jest zawieszeniem kwadratu, a 16-brył jest zawieszeniem ośmiościanu. W jeszcze wyższych wymiarach ta konstrukcja nadal działa: figura dualna do kostki I^n jest zawieszeniem figury dualnej do I^{n-1}.) Wyobraźmy sobie, że na hiperkostce opisaliśmy (hiper)sferę. W tę samą sferę wpiszmy 16-brył foremny w taki sposób, że jego przekątne są prostopadłe do „ścian" hiperkostki. Wówczas wierzchołki obu brył (a jest ich $16+8=24$) są wierzchołkami figury zwanej 24-*bryłem foremnym.* Składa się ona z dwudziestu czterech ośmiościanów foremnych, po sześć w każdym wierzchołku, sklejonych z sobą tak, że kwadraty, będące ich równikami, wyznaczają ściany (dwuwymiarowe) w hiperkostce. Tę figurę trudniej sobie wyobrazić, gdyż nie ma swojego odpowiednika w niższych wymiarach ani zresztą w wyższych. Fakt, że ta samodualna figura jest charakterystyczna tylko dla czwartego wymiaru, jest konsekwencją tego, iż krawędź I^4 ma taką samą długość jak promień sfery opisanej na tej hiperkostce.

Wśród wielościanów trójwymiarowych jest dualna para o stosunkowo dużej liczbie ścian, mianowicie dwunasto- i dwudziestościan. Czy w przestrzeni czterowymiarowej też istnieje podobna para? Tak. Poza czterema wyżej opisanymi wielobryłami, można jeszcze zbudować figurę o stu dwudziestu bryłach oraz figurę do niej dualną o sześciuset(!) bryłach. Ten pierwszy to 120 dwunastościanów foremnych, po cztery w każdym wierzchołku, ten drugi zaś to 600 czworościanów, po dwanaście przy wierzchołku. Aż strach pomyśleć, jakie potwory kryją się w wyższych wymiarach. Otóż wymiary od piątego w górę są, niestety, ubogie: poza n-sympleksem, kostką I^n oraz bryłą do niej dualną nie ma żadnych wypukłych wielościanów foremnych. A szkoda. Widzimy więc, że Platonowi nie udało się znaleźć zaledwie trzech nowych brył: samodualnego 24-bryłu oraz dualnej pary o stu dwudziestu i sześciuset bryłach, występujące wyłącznie w czterech wymiarach. Trzy z jego wielościanów – czworościan, sześcian i ośmiościan – to przedstawiciele długiego, nieskończonego rodu hiperbrył foremnych.