Szuflady pana Dirichleta

Jeśli macie w biurku trzy szuflady, a chcecie do nich włożyć zeszyty z, powiedzmy, sześciu przedmiotów, to nie ma rady: w co najmniej jednej szufladzie muszą znaleźć się zeszyty z co najmniej dwóch przedmiotów. Tę prostą obserwację można rozwinąć do następującej zasady ogólnej: jeśli rozmieścić m przedmiotów w n szufladach i $m > n$, to w co najmniej jednej szufladzie znajdą się co najmniej dwa przedmioty. Ta ogólna zasada znana jest pod nazwą *zasady szufladkowej Dirichleta*. Jej matematyczne sformułowanie brzmi tak: jeśli $m > n$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa ze zbioru m-elementowego w zbiór n-elementowy.

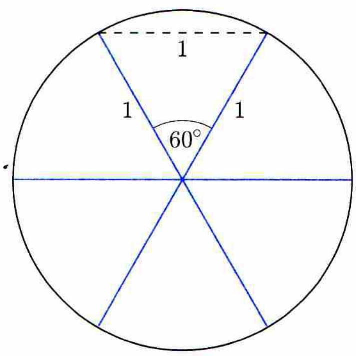
Funkcja f jest różnowartościowa, gdy różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości: gdy $a \neq b$, to $f(a) \neq f(b)$.

Oczywiście, szuflady mogą być przeróżne, w zależności od kontekstu, mogą nawet wcale nie przypominać fragmentu mebla. Istotne jest jedynie, co jesteśmy skłonni uznać za szufladę. Popatrzmy na dwa zadania, które można rozwiązać za pomocą zasady Dirichleta, odpowiednio interpretując pojęcia „szuflady" i „przedmiotu".

Na początek zadanie geometryczne.

W kole o promieniu 1 *wybrano siedem punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość jest niewiększa od* 1.

Rozwiązanie: Zacznijmy od zbudowania szuflad. Podzielmy koło na sześć przystających wycinków.



Zauważmy, że odległość dowolnych dwóch punktów należących do tego samego wycinka jest równa co najwyżej 1. Mamy 6 wycinków (to są nasze szuflady) i 7 punktów (przedmioty), zatem w co najmniej jednym wycinku leżą dwa punkty – a więc odległość między nimi nie przekracza 1 i teza zadania jest spełniona.

Spróbujmy teraz użyć zasady szufladkowej Dirichleta w następującym zadaniu.

Nauczyciel matematyki postanowił na każdej z najbliższych 14 *lekcji przepytać co najmniej jedną osobę, tak aby w sumie przepytać co najwyżej dwadzieścioro uczniów. Wykaż, że niezależnie od sposobu rozdzielenia pytanych uczniów na* 14 *lekcji, zawsze znajdzie się kilka kolejnych lekcji, w trakcie których nauczyciel przepyta w sumie dokładnie* 7 *osób.*

Rozwiązanie: Można się domyślić, że „szufladami" będą lekcje, a „przedmiotami" uczniowie, ale tym razem nie chodzi o to, co lub kto trafi do jednej szufladki, lecz o kilka szufladek z określoną z góry „zawartością".

Niech x_i oznacza liczbę uczniów przepytanych do końca lekcji o numerze i, dla $i = 1, 2, \ldots, 14$. Na każdej lekcji ma być przepytana co najmniej jedna osoba, zatem

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{14};$$

inaczej mówiąc, wszystkie liczby x_i są różne. Ponadto, $1 \leqslant x_1$ oraz $x_{14} \leqslant 20$. Dodajmy teraz 7 do każdej z tych liczb: otrzymamy

$$x_1 + 7 < x_2 + 7 < \ldots < x_{14} + 7,$$

zatem te liczby też będą wszystkie różne, a przy tym $8 \leqslant x_1 + 7$ i $x_{14} + 7 \leqslant 27$. W takim razie wszystkie liczby

$$x_1,\ x_2,\ \ldots, x_{14},\ x_1 + 7,\ x_2 + 7,\ \ldots, x_{14} + 7$$

są liczbami całkowitymi zawartymi między 1 i 27. Jest ich jednak 28, więc co najmniej dwie z nich muszą być równe. W pierwszej czternastce nie ma dwóch jednakowych liczb, w drugiej też nie, zatem jedna z pierwszych czternastu liczb, powiedzmy, x_i, musi być równa jednej z następnych czternastu liczb, powiedzmy, $x_j + 7$: $x_i = x_j + 7$. Oznacza to, że $x_i - x_j = 7$, a więc między lekcją o numerze j a końcem lekcji o numerze i przepytanych zostało dokładnie 7 uczniów. I koniec dowodu.

Nie chcąc odbierać Czytelnikowi przyjemności wynikającej z samodzielnego rozwiązania zadania, proponuję następujące.

1. W kole o promieniu 1 rozmieszczono 7 punktów, przy czym odległość między dowolnymi dwoma z nich jest niemniejsza niż 1. Wykaż, że jeden z tych punktów jest środkiem koła.

2. Każde dwa wierzchołki sześciokąta połączono odcinkiem w jednym z dwóch kolorów, amarantowym lub seledynowym. Udowodnij, że z wierzchołków sześciokąta można wybrać co najmniej jeden trójkąt o wszystkich bokach w tym samym kolorze.

Powodzenia!

Wiktor BARTOL