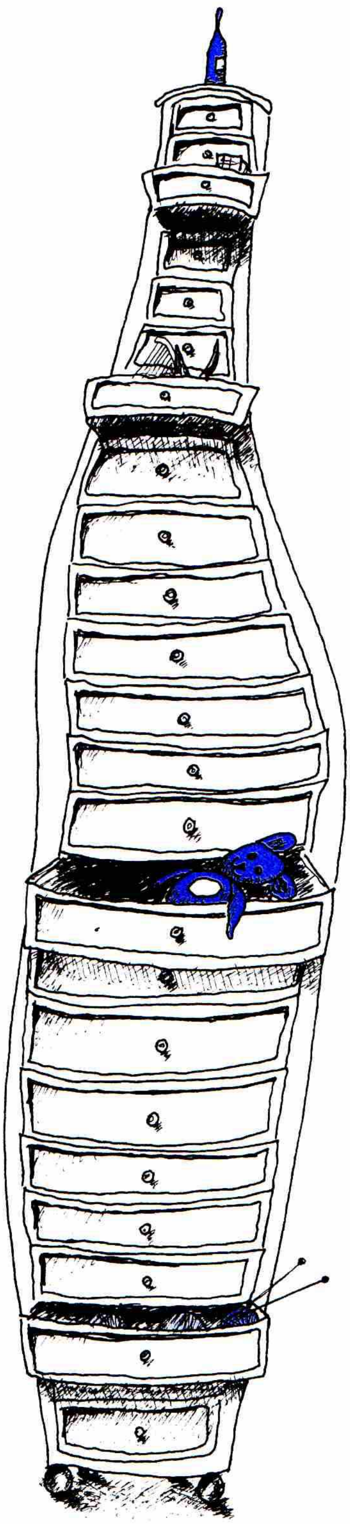
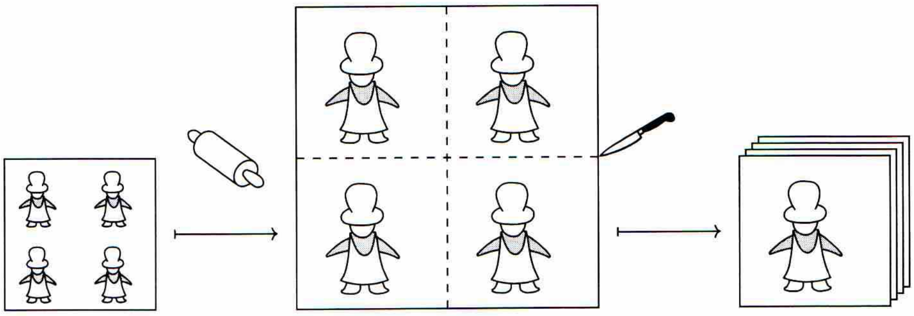
Przekształcenie piekarza

Zapewne widzieliście kiedyś Mamę, Tatę lub Babcię przygotowujących ciasto na pierogi. Jeśli nie przyszło Wam wtedy do głowy spojrzeć na ich pracę okiem matematyka, to nic straconego! Wprowadzimy teraz bowiem trochę abstrakcji do naszej kuchni. Przyjmiemy najpierw, że ciasto ma kształt kwadratu o boku 1, wałkowanie to jednokładność o skali 2, natomiast składanie wygląda tak jak na rysunku 1.



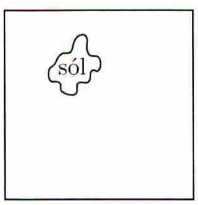


Rys. 1

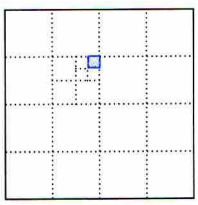
Oczywiście, cała praca piekarska ma na celu m.in. dobre wymieszanie składników. Wyobraźmy więc sobie, że gdzieś w pewnym miejscu kwadratu została rozsypana sól. Czy potraficie udowodnić, że zostanie ona równomiernie rozprowadzona po całym placku, po odpowiedniej liczbie rozwałkowań i złożeń? (rys. 2).

Jeśli sól jest rozsypana na obszarze o dziwacznym kształcie, nasze zadanie jest zbyt skomplikowane. Uprośćmy je zatem i zbadajmy, co się dzieje, gdy sól jest rozsypana w kwadracie o boku 2^{-j}, $j \in \mathbb{N}$ (rys. 3).

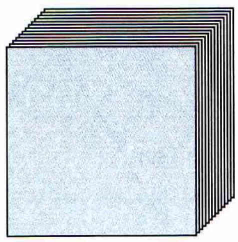
Nietrudno spostrzec, że po j rozwałkowaniach i złożeniach kolorowy kwadracik osiągnie rozmiary 1 na 1 i zgromadzona w nim sól wniknie równomiernie w placek (rys. 4).



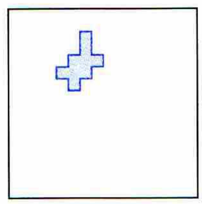
Rys. 2



Rys. 3



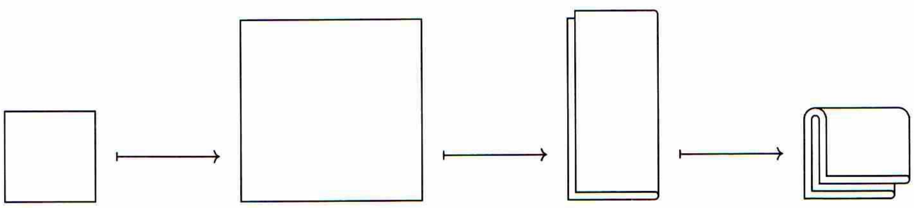
Rys. 4



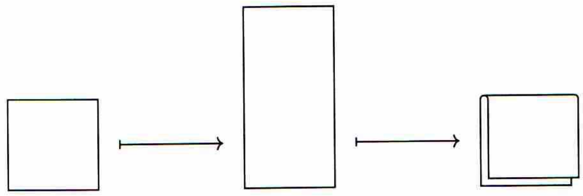
Rys. 5

Teraz łatwo poradzimy sobie także z sytuacją z rysunku 5 i ostatecznie przybliżając obszar z rysunku 2 odpowiednią sumą kwadratów, dojdziemy do wniosku, że i z tym przypadkiem sobie poradzimy.

Zastanówcie się teraz, czy sól będzie równomiernie rozprowadzona także wtedy, gdy wałkowanie i składanie będzie przebiegać zgodnie ze schematem z rysunku 6 lub ze schematem z rysunku 7.



Rys. 6

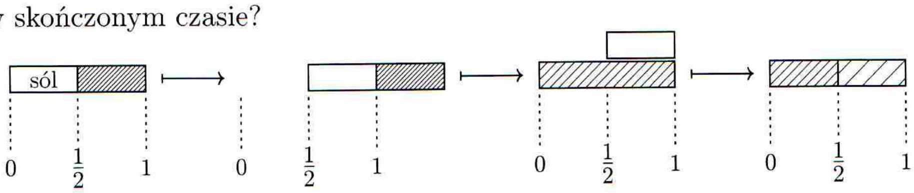


Rys. 7

A teraz spójrzmy na bardziej wyrafinowanego piekarza, który ugniata ciasto według schematu z rysunku 8. Czy on również równomiernie rozprowadzi sól? Ile wałkowań na to potrzebuje? Czy może tego dokonać w skończonym czasie?

Przekształcenie „wyrafinowanego piekarza" można opisać wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{dla } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ 2(1-x) & \text{dla } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$



Rys. 8

Może ktoś na koniec tych zabaw spytać, czy taka piekarska matematyka może się istotnie jakiemuś piekarzowi przydać? Oczywiście nie! Przydatna jest ona bowiem raczej samym matematykom, którzy z „wałkowaniem i składaniem" spotykają się w bardziej skomplikowanych przypadkach, tam gdzie odrobina intuicji jest na wagę złota.

A problem równomiernego rozproszenia soli to – po odpowiednim uogólnieniu – jeden z podstawowych problemów pewnej bardzo rozbudowanej gałęzi matematyki (teorii ergodycznej). Ale to już zupełnie inna para kaloszy.

Witold SADOWSKI

Czym różniło się starożytne pojęcie ruchu od obecnego?

Trudności z poprawnym zdefiniowaniem prędkości pokonał dopiero Newton wprowadzając rachunek różniczkowy. Wcześniej „straszyło" widmo aporii Zenona z Elei, który poddawał w wątpliwość istnienie ruchu pokazując, że przyjęcie jego realności prowadzi do sprzeczności. Najbardziej znane z tych aporii to „Achilles i żółw", oraz „strzała". Achilles, żeby dogonił żółwia, musi najpierw znaleźć się w miejscu, w którym teraz znajduje się żółw, ale przez ten czas żółw trochę się przesunie itd. Strzała, żeby dolecieć do tarczy, musi najpierw przebyć połowę odległości, następnie połowę połowy itd. Zenon twierdził, że w takim razie ani Achilles nie powinien dogonić żółwia, ani strzała dolecieć do tarczy. W konsekwencji pojęcie ruchu jest wewnętrznie sprzeczne. Twierdzili tak eleaci, którzy uważali, że jest tylko byt, a niebytu nie ma. W takim razie nie ma ruchu, bo ruch musiałby powodować przejście do czegoś, czego nie ma. A jak czegoś nie ma, to nie ma i nie można do tego przejść.

Pozostali filozofowie greccy aż tak drastycznie do ruchu nie podchodzili, ale ani oni, ani ich następcy (aż do Newtona) nie potrafili sobie z pojęciem prędkości poradzić.

Należy jednak pamiętać, że dla starożytnych ruch był przedmiotem rozważań filozoficznych, a obecnie jest to przedmiot badań fizyki. Cele tych nauk są różne, więc nie można bezpośrednio porównywać poglądów starożytnych i współczesnych, bo to tak, jakby przeciwstawiać sobie twierdzenia: „jabłko jest okrągłe" i „jabłko jest smaczne".

Obecnie wiemy, że choć strzała rzeczywiście musi przebyć ten nieskończony ciąg odcinków

$$s = s/2 + s/4 + s/8 + \ldots,$$

to jeśli pokonuje każdy z nich w czasie proporcjonalnym do jego długości, to dotrze do celu w skończonym czasie

$$t = t/2 + t/4 + t/8 + \ldots,$$

a więc ze stałą prędkością $v = s/t$. Wydaje się, że nie ma w tym nic odkrywczego, ale to tylko dlatego, że się do tego przyzwyczailiśmy. Tak naprawdę „prędkość jest stosunkiem drogi do czasu" tylko dla ruchu jednostajnego (lub dla prędkości średniej). Ogólnie, prędkość (chwilowa) jest to „granica ilorazu wyrazów dwóch ciągów". Jednego opisującego przebywaną drogę w coraz mniejszych odcinkach czasu i drugiego opisującego właśnie te coraz mniejsze odcinki czasu. Aby robić to w sposób dający poprawne wyniki należy użyć rachunku różniczkowego.

Piotr ZALEWSKI