Ułamki łańcuchowe i saros

Ułamek łańcuchowy był w starożytności wysuniętą przez Teajtetosa propozycją przedstawiania tego, co dziś nazywamy liczbami rzeczywistymi. Pomysł Teajtetosa nie przyjął się, niemniej jednak za pomocą ułamka łańcuchowego można zilustrować pewne zagadnienie astronomiczne.

Iloraz dwu liczb A/B to część całkowita K_0 oraz jakiś ułamek właściwy. Ten ułamek to jedność podzielona przez odwrotność ułamka, a ona to znowu jakaś inna część całkowita K_1 plus inny ułamek właściwy. Do tego ułamka znowu stosuje się to, co powiedziano w poprzednim zdaniu itd. Zapisuje się to właśnie jako ułamek łańcuchowy

$$A/B = [K_0;\ K_1,\ K_2, \ldots].$$

Jeżeli na starcie był iloraz stanowiący po prostu liczbę wymierną, to odpowiadający jej ułamek łańcuchowy będzie skończony, bo opisana tu procedura osiągnie koniec. Jeżeli iloraz był liczbą niewymierną, to ułamek będzie wprawdzie nieskończony, ale jego obcięcia (mówi się: redukty) będą wymiernymi przybliżeniami wyjściowego stosunku liczb. A to już może być interesujące.

Niech $A = 29{,}5306$ oraz $B = 27{,}2122$ będą wyrażonymi w dniach przybliżonymi długościami miesiąca synodycznego i smoczego. Miesiąc synodyczny to okres, po jakim powtarzają się fazy Księżyca, a smoczy to okres, po jakim Księżyc powraca do tego samego węzła orbity, tj. punktu, w którym jego orbita przecina ekliptykę. Żaden z nich nie jest równy okresowi obiegu Księżyca wokół Ziemi, ponieważ ani Słońce, ani węzły orbity nie są na niebie nieruchome. Znaczenie tych pojęć wynika stąd, że z ich pomocą można łatwo sformułować prawo rządzące zaćmieniami (Słońca lub Księżyca). Aby w ogóle nastąpiło zaćmienie, Księżyc musi znajdować się albo w nowiu, albo w pełni oraz blisko któregoś węzła. Jeżeli więc kiedyś nastąpiło zaćmienie, to w przyszłości zaćmienie nastąpi, gdy upłynie całkowita liczba miesięcy zarówno synodycznych, jak i smoczych – wszystko oczywiście w jakimś rozsądnym przybliżeniu. Długości miesięcy określone ze skończoną dokładnością dają iloraz wymierny, zatem odpowiadający mu ułamek łańcuchowy jest skończony, tylko nie wiadomo, jak długi. Jego początek to $A/B = [1;\ 11,\ 1,\ 2,\ 1,\ 4, \ldots]$. Obcięcie akurat na tej czwórce daje $A/B \approx 242/223$. Wynik ten oznacza, że 242 miesiące smocze trwają tyle samo co 223 miesiące synodyczne, z błędem – co łatwo sprawdzić – zaledwie 0,03 dnia.

Okres ten, zwany sarosem, równy w przybliżeniu 6585,3 dni, znany był już w starożytności. Odkryto go prawdopodobnie metodą prób i błędów. Rzecz jasna, w czasie każdego sarosu wystąpi wiele innych zaćmień, ale te, które dzieli saros, stanowią regularną serię. Jednak przewidywanie zaćmień na tej podstawie na bardzo odległą przyszłość musi zawieść, bo przecież ta regularność to tylko przybliżenie.

Tomasz KWAST

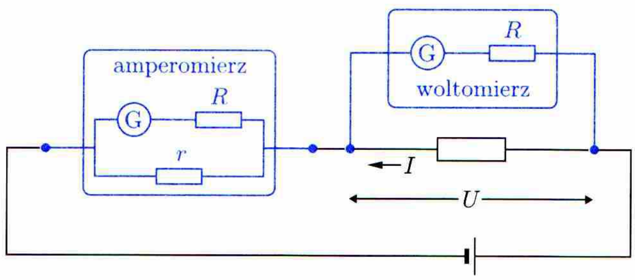
Czym różni się budowa woltomierza i amperomierza?

Jeżeli chodzi o budowę „zewnętrzną", to zarówno amperomierz, jak woltomierz wyglądają podobnie: są to pudełka z dwoma kabelkami wyposażone we wskaźnik wychyleniowy lub elektroniczny. Obecnie często używa się mierników uniwersalnych, których funkcje zmienia się za pomocą np. pokrętła. Taki przyrząd może być zależnie od potrzeby amperomierzem, woltomierzem, omomierzem itp.

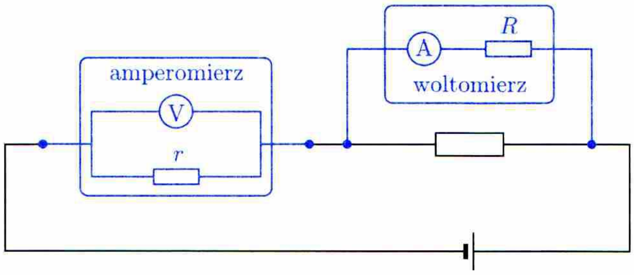
Woltomierz i amperomierz (w tradycyjnej postaci) mierzą natężenie prądu za pomocą galwanometru analogowego. Sekret polega na różnym sposobie włączania go w obwód.

Woltomierz włączamy równolegle. Prąd płynący przez woltomierz płynie przez szeregowo połączone: galwanometr, czyli przyrząd bezpośrednio mierzący natężenie prądu i oraz duży, znany opór R. Spadek napięcia jest po prostu równy $i \cdot R$, a ponieważ opór jest duży, to natężenie prądu jest bardzo małe, a więc prąd płynący przez badany element jest prawie niezakłócany.

Amperomierz natomiast włączamy szeregowo, ale ma on w środku dwie równoległe gałęzie. Jedna ze znanym, bardzo małym oporem r, przez którą płynie większość prądu oraz drugą z dużym oporem R i z szeregowo do tego oporu włączonym galwanometrem.



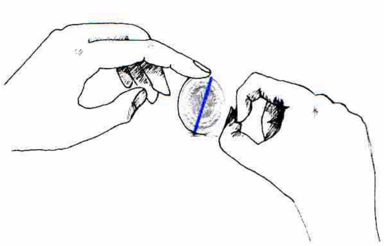
Czyli amperomierz to mały opór r z dołączonym do niego równolegle woltomierzem.



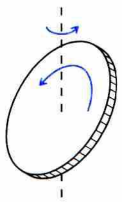
Mierząc prąd i płynący przez gałąź z oporem R, mierzymy całkowity prąd $I = i \cdot (1 + R/r)$, a ponieważ $R \gg r$, to można przyjąć, że $I = i \cdot R/r$, więc wskazania galwanometru (mierzącego prąd i) musimy tylko zmienić odpowiednio skalę mnożąc przez czynnik R/r.
Natomiast sam (wychyleniowy) galwanometr mierzy siłę odchylającą ramkę umieszczoną w zewnętrznym polu magnetycznym. Obrót ramki jest spowodowany polem magnetycznym indukowanym przez płynący w niej prąd, a powstrzymywany przez sprężynę. Siła jest z jednej strony proporcjonalna do wychylenia (dzięki temu możemy ją mierzyć), a z drugiej do natężenia.
W przypadku mierników cyfrowych wewnętrzna budowa może być odwrócona. Sensor (przetwornik analogowo-cyfrowy) może mierzyć napięcie, a nie natężenie prądu jak galwanometr. To nie ma jednak w praktyce większego znaczenia, gdyż zawsze amperomierza można użyć jako woltomierza i odwrotnie. Wystarczy znać (lub zmierzyć) wewnętrzny opór przyrządu i mieć dodatkowy, znany, mały (duży) opór, aby przerobić woltomierz (odpowiednio: amperomierz) na amperomierz (odpowiednio: woltomierz).

Piotr ZALEWSKI

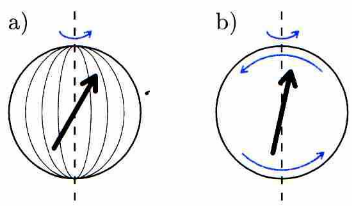
Kilka doświadczeń z monetą



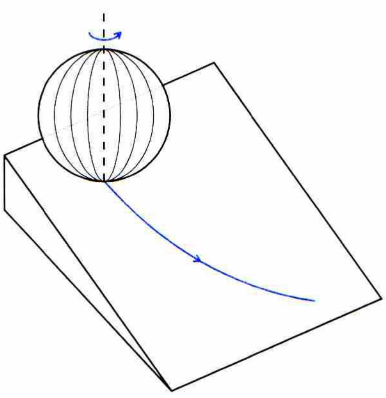
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Moneta to jeden z ulubionych „przyrządów" zadaniowych matematyków, zwłaszcza miłośników rachunku prawdopodobieństwa (patrz np. artykuł „Gry Penneya" w *Delcie* 7/2004). Spróbuję pokazać, że za pomocą monety można równie skutecznie bawić się w fizykę.

Pierwsze doświadczenie jest proste: na dużej, gładkiej i poziomej powierzchni spróbujmy przytrzymać monetę palcem pionowo. Drugim palcem należy ją „pstryknąć" w sam kraniec (rysunek 1). Moneta zacznie wirować z dużą szybkością i jednocześnie poruszać się powoli do przodu. Ruch postępowy po chwili ustanie, ale moneta będzie cicho kręcić się w miejscu. Po pewnym czasie charakter ruchu znów się zmieni, moneta przechyli się i z łoskotem będzie się turlać w kółko coraz bardziej przechylona, aż ruch ustanie całkowicie (rysunek 2).

Jeśli namalować na powierzchni monety dużą, kolorową strzałkę (np. flamastrem), to widać będzie, że póki moneta wiruje prosto, strzałka podczas ruchu wskazuje wciąż ten sam kierunek. Kiedy jednak zacznie się przechylać, strzałka będzie szybko wirować wokół osi monety (rysunek 3a i 3b).

Wyjaśnienie tego zachowania jest następujące: gdy prędkość wirowania jest dostatecznie duża, moneta wykonuje po prostu ruch wirowy wokół ustalonej osi, stojąc na krawędzi. Gdy jednak ta prędkość jest zbyt mała, moneta pochyla się i do wirowania dochodzi toczenie się monety po coraz to szerszym kółku. Gdy moneta toczy się, strzałka kręci się wokół osi monety.

Ciekawe może być porównanie czasu trwania poszczególnych etapów ruchu dla różnych monet – np. dla cienkiej i dużej jednozłotówki i grubej, ale mniejszej dwuzłotówki.

Czytelnikom pozostawiam natomiast przyjemność pogłowienia się nad rezultatem następującego eksperymentu: monetę pstrykamy na równi pochyłej, ustawionej pod niewielkim kątem do poziomu. Moneta będzie oczywiście zsuwać się z równi, ale po zaskakującej trajektorii (rysunek 4).

Mikołaj KORZYŃSKI