Klub 44

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
370 ($WT = 1{,}54$) i **371** ($WT = 2{,}02$)
z numeru 1/2004

Zbigniew Galias	– Kraków	42,38
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	24,97
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	22,14
Tomasz Wietecha	– Tarnów	19,44
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	17,80

Rozwiązanie zadania F 626.
Niech x oznacza wydłużenie sprężyn 1 i 2 od długości swobodnej, x_3, x_4 – wydłużenie sprężyn 3 i 4. Z warunków zadania mamy

$$k_1x + k_2x + k_3x_3 + k_4x_4 = mg$$

oraz z równości momentów sił działających na płytę:

$$k_1x + k_4x_4 = k_2x + k_3x_3,$$

także

$$k_1x + k_2x = k_3x_3 + k_4x_4.$$

Stąd $x_3 = x\frac{k_1}{k_3}$ oraz $x_4 = x\frac{k_2}{k_4}$, a po podstawieniu do pierwszego równania

$$x = \frac{mg}{2k_1 + 2k_2}.$$

Siły wynoszą więc odpowiednio

$$F_1 = F_3 = \frac{k_1mg}{2k_1 + 2k_2},$$

$$F_2 = F_4 = \frac{k_2mg}{2k_1 + 2k_2}.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
471 ($WT = 2{,}24$) i **472** ($WT = 1{,}37$)
z numeru 12/2003

Paweł Kubit	– Kraków	44,94
Jerzy Cisło	– Wrocław	39,86
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	39,64
Michał Jóźwikowski	– Błonie	38,07
Janusz Olszewski	– Suwałki	37,90
Witold Bednarek	– Łódź	37,64
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	37,44
Andrzej Daniluk	– Kraków	34,80

Paweł Kubit, wytrawny uczestnik **Ligi**, autor wielu zadań, kończy trzecią rundę, zostając dwudziestym szóstym Weteranem Klubu 44 M.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2004

Przypominamy treść zadań:

479. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y.$$

480. Czy istnieje dodatnia liczba całkowita a mająca tę własność, że dla każdej trójki dodatnich liczb całkowitych k, ℓ, m iloczyn $a^k(a+1)^\ell(a+2)^m$ da się przedstawić jako suma dwóch kwadratów liczb całkowitych?

479. Niech f będzie jedną z szukanych funkcji. Oznaczmy $f(0) = c$. Podstawienie $x = y = 0$ pokazuje, że $f(c^2 + c) = 0$. Z kolei podstawienie $x = y = c^2 + c$ prowadzi do równości $f(0) = c^2 + c$; stąd $c = c^2 + c$, czyli $c = 0$, czyli $f(0) = 0$.

Kładąc w danym równaniu $x = 0$ dostajemy równość $f(f(y)) = y$, z której wynika, że funkcja f jest różnowartościowa. Kładąc zaś $y = 0$ otrzymujemy zależność

$$f\left(f(x)^2\right) = xf(x).$$

Podstawiając w niej $x = f(y)$ i uwzględniając równość $f(f(y)) = y$, otrzymujemy

$$f(y^2) = f(y)y.$$

Zastępując y przez x dostajemy po prawej stronie ten sam iloczyn, co w poprzednim równaniu. Zatem $f(x^2) = f(f(x)^2)$ i wobec różnowartościowości funkcji f mamy $f(x)^2 = x^2$, czyli

$$f(x) = x \quad \text{lub} \quad f(x) = -x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście funkcje $f(x) \equiv x$ oraz $f(x) \equiv -x$ są rozwiązaniami zadanego równania. Pokażemy, że innych nie ma. Przypuśćmy, że f jest taką „inną" funkcją. Istnieją więc liczby $u, v \neq 0$, dla których $f(u) = u$, $f(v) = -v$. Przyjmując w danym równaniu $x = u$, $y = v$, otrzymujemy $f(u^2 - v) = u^2 + v$, co oznacza, że

$$u^2 - v = u^2 + v \quad \text{lub} \quad u^2 - v = -(u^2 + v).$$

W obu przypadkach mamy sprzeczność z warunkiem $u, v \neq 0$. Ostatecznie więc $f(x) \equiv x$ lub $f(x) \equiv -x$.

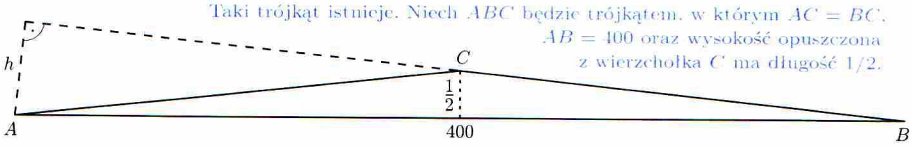
480. Zadanie jest ilustracją znanej tożsamości

$$(x^2 + y^2)(s^2 + t^2) = (xs + yt)^2 + (xt - ys)^2,$$

która mówi, że iloczyn sum dwóch kwadratów także jest sumą dwóch kwadratów. Wystarczy zatem znaleźć taką liczbę naturalną a, by każda z liczb a, $a+1$, $a+2$ była sumą dwóch kwadratów. Skoro ta własność jest multiplikatywna, będzie ona przysługiwała każdej liczbie postaci $a^k(a+1)^\ell(a+2)^m$.

Żądany warunek spełnia, na przykład, liczba $a = 144 = 12^2 + 0^2$, bowiem $145 = 12^2 + 1^2$, $146 = 11^2 + 5^2$.

Rozwiązanie zadania M 1071.
Taki trójkąt istnieje. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AC = BC$, $AB = 400$ oraz wysokość opuszczona z wierzchołka C ma długość 1/2.



Trójkąt ABC ma pole 100. Wykażemy, że wysokości trójkąta ABC są mniejsze od 1. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc wystarczy wykazać, że wysokość h poprowadzona z wierzchołka A jest mniejsza od 1. Ale

$$h = \frac{2\cdot\text{pole}(ABC)}{BC} = \frac{200}{BC} < 1, \quad \text{gdyż} \quad BC > \tfrac{1}{2}AB = 200.$$

Klub 44

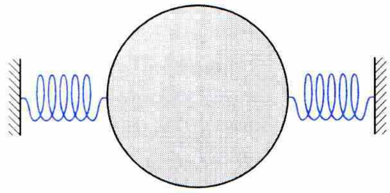
Redaguje Jerzy B. BROJAN

UWAGA!
ZMIANA ADRESU
DO KORESPONDENCJI!

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2004

Przypominamy treść zadań:

376. Do jednorodnej płytki o kształcie koła doczepiono dwie sprężynki w przeciwległych punktach obwodu, napięto sprężynki pewną siłą, a drugie ich końce zamocowano, tak że w położeniu równowagi długość każdej sprężynki jest równa promieniowi koła (rys. 1a).

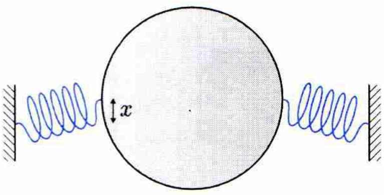


Rys. 1a

Jeśli w ruchu postępowym płytki wzdłuż osi pionowej okres małych drgań jest równy T, to ile wynosi okres małych drgań dla ruchu obrotowego:
a) wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek koła,
b) wokół pionowej osi przechodzącej przez środek koła?

377. Obwód składa się z n węzłów połączonych każdy z każdym opornikami o oporze r.
a) Obliczyć opór zastępczy między dwoma węzłami sieci ($n \geqslant 2$).
b) Zwarto dwa węzły tego obwodu. Obliczyć opór zastępczy między tymi dwoma węzłami a dowolnym innym ($n \geqslant 3$).
c) Zwarto dwa węzły tego obwodu. Obliczyć opór zastępczy między dwoma innymi węzłami ($n \geqslant 4$).

376. Oznaczmy masę płytki jako m, promień jako r, a siłę napięcia sprężynek jako F. Zauważmy, że w przybliżeniu małych drgań we wszystkich trzech rozpatrywanych przypadkach można zaniedbać zmiany wartości F, gdyż wydłużenie sprężynek jest znacznie mniejsze od wychylenia płytki z położenia równowagi (dawniej mówiono: „jest małą drugiego rzędu”). Dla ruchu postępowego wzdłuż pionowej osi siłą kierującą płytkę w stronę położenia równowagi jest pionowa składowa F, równa w przybliżeniu Fx/r (gdzie x – przesunięcie płytki, zob. rys. 1b).

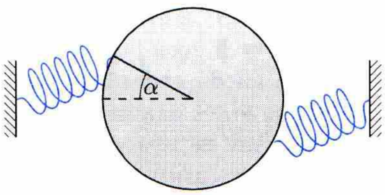


Rys. 1b

Łącznie dla obu sprężynek odpowiednikiem stałej sprężystości jest wyrażenie $2F/r$, zatem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{2F}}.$$

Wychylenie płytki w przypadku a) jest przedstawione na rys. 1c i nietrudno sprawdzić, że jeśli kąt obrotu α jest mały, to moment każdej z sił F względem środka koła wynosi w przybliżeniu $2Fr\alpha$ – łącznie $4Fr\alpha$.



Rys. 1c

Do wzoru na okres wahadła sprężynowego powinniśmy więc podstawić zamiast stałej sprężystości wyrażenie $4Fr$, a zamiast masy – moment bezwładności jednorodnego koła (lub walca), równy $(1/2)mr^2$. Otrzymujemy

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{8F}} = \frac{T}{2}.$$

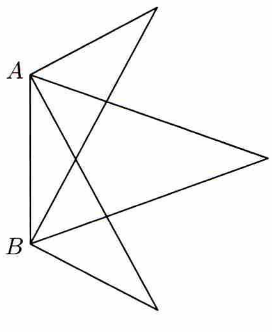
Dla przypadku b) moment sił kierujących jest taki sam, jak dla przypadku a), ale moment bezwładności koła względem osi przechodzącej przez jego środek i leżącej w jego płaszczyźnie jest dwukrotnie mniejszy, niż względem osi prostopadłej do płaszczyzny. Zatem

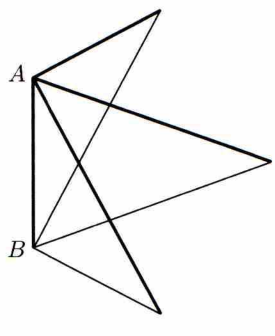
$$T_b = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{16F}} = \frac{T}{2\sqrt{2}}.$$

377. Oznaczmy symbolami A i B te węzły, do których przyłączono napięcie zewnętrzne.

a) Ze względu na symetrię układu oczywiste jest, że prąd nie popłynie żadnym z połączeń między pozostałymi węzłami. Zatem mamy do czynienia z równoległym połączeniem oporu r (łączącego A i B bezpośrednio) oraz $(n-2)$ oporów $2r$ (zob. rys. 2a). Opór zastępczy całości wynosi

$$R = \frac{2}{n}r$$





Rys. 2a

Rys. 2b

b) Zwarte węzły można uważać za węzeł połączony z każdym innym węzłem opornikiem o wartości $r/2$. Jak poprzednio, pozostałe węzły (tzn. ani oba zwarte, ani węzeł podłączony do drugiego bieguna źródła) mają ze względu na symetrię jednakowy potencjał i można je uważać za zwarte lub też pominąć połączenia między nimi. Mamy tu zatem połączenie równoległe oporu $r/2$ i $(n-3)$ oporów $3r/2$ (zob. rys. 2b, gdzie „podwójne” połączenia oznaczono grubszą linią), a szukana wartość oporu zastępczego jest równa

$$R = \frac{3}{2n}r.$$

c) W tym przypadku zwarcie nie ma znaczenia, gdyż dotyczy węzłów, które i tak miały ten sam potencjał. Wynik jest ten sam, co w punkcie a).