# Grupy i magiczna sztuczka

*Czesław BAGIŃSKI*
*Edmund R. PUCZYŁOWSKI*

Na pewno nie każdy uświadamia sobie, że liczby całkowite rozważane w oderwaniu od naturalnych działań dodawania i mnożenia stają się jakby senne i mało rozróżnialne. To dopiero własności działań czynią świat liczb tak żywym i wielobarwnym. Okazuje się zresztą, że można „działanie" przenieść także w inne światy obiektów matematycznych, które wyposażone w nową strukturę tzw. grupy stają się niezwykle atrakcyjnym tematem badań.

Przypomnijmy, że grupą nazywamy niepusty zbiór $G$ z działaniem $\circ$, spełniającym warunki:

łączności

(1) $\forall_{x,y,z\in G}\ (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z);$

istnienia elementu neutralnego

(2) $\exists_{e\in G}\forall_{x\in G}\ e\circ x = x\circ e = x;$

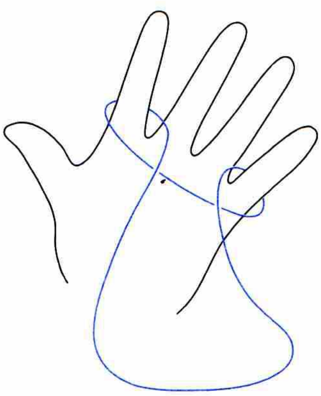
odwracalności każdego elementu

(3) $\forall_{x\in G}\exists_{y\in G}\ x\circ y = y\circ x = e.$

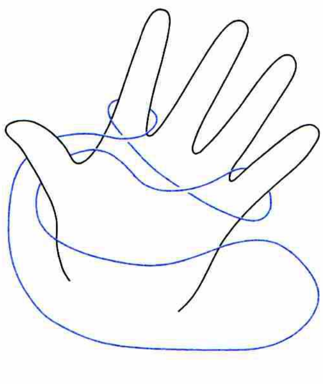
Rok temu pisaliśmy już o użyteczności pojęcia grupy w elementarnej teorii liczb (*Delta* 8/2003). Tym razem dostrzeżemy strukturę grupy tam, gdzie wydawałoby się matematyka nie sięga.

Będzie to opowieść o pewnej sztuczce znanej nam z dzieciństwa. Jej znajomość pozwalała wielokrotnie imponować kolegom z podwórka, którzy mimo uważnego śledzenia kolejnych etapów jej wykonania, nie potrafili przez długi czas jej powtórzyć. Jak zatem wygląda ta magiczna sztuczka?

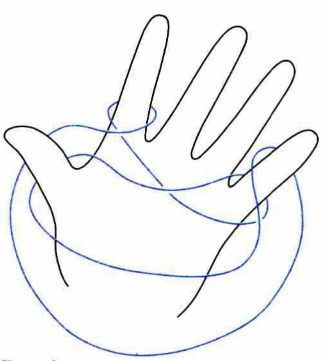
Na palcach lewej ręki w kolejnych etapach opisanych przez rysunki 1–3 zakładamy wykonaną ze sznurka pętlę, aż osiągniemy pętlę z rysunku 4.



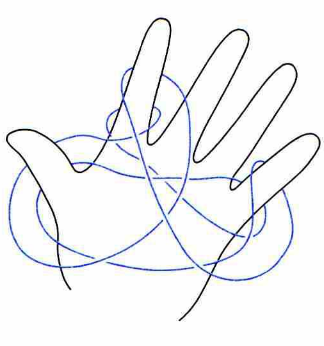
Rys. 1



Rys. 2

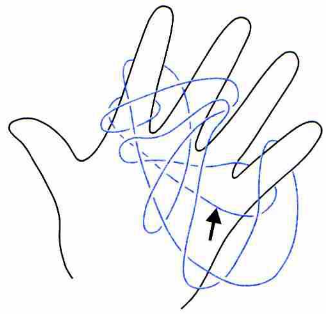


Rys. 3



Rys. 4

Robimy to możliwie szybko, by oglądający nie zauważyli dokładnie, jak ją tworzymy. Ostatnim etapem sztuczki jest pozorne jej skomplikowanie. Zdejmujemy mianowicie te fragmenty pętli, które są zaczepione o kciuk i przekładamy między palec środkowy i serdeczny (rys. 5).

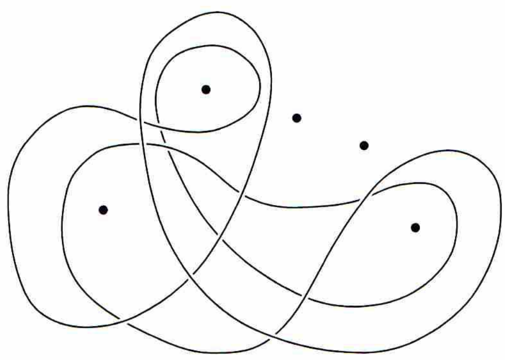


Rys. 5

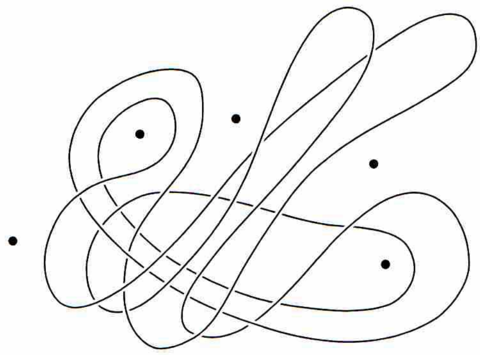
Na koniec ciągniemy powoli ku sobie fragment sznurka wskazany na rysunku strzałką. Okazuje się, że cała pętla daje się w ten sposób ściągnąć z ręki bez przekładania żadnego jej fragmentu przez czubki palców.

Dla lepszego zrozumienia całej sytuacji przyjrzymy się jeszcze raz pętlom z rysunków 4 oraz 5 i opiszemy je w bardziej ścisły i formalny sposób. W tym celu wprowadzimy odpowiednie uproszczenia oraz podamy zasady tworzenia pętli, ich porównywania i opisu.

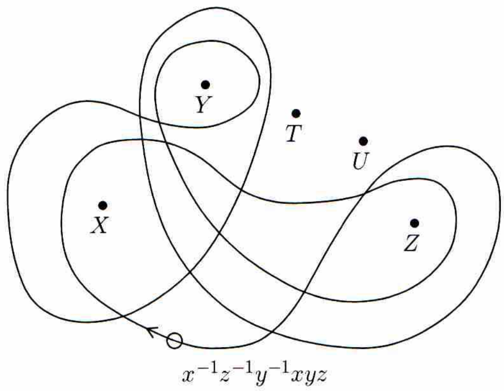
Możliwie najprostszą pętlę, wykonaną ze sznurka z połączonymi końcami, będziemy zakładać na, powiedzmy, kilka kołków wbitych w płaską powierzchnię. Będziemy to ilustrować dwuwymiarowymi rysunkami, gdzie kołkom odpowiadać będą wyróżnione punkty płaszczyzny, a pętlom krzywe zamknięte umieszczone na tej płaszczyźnie. Będziemy przy tym zakładać, że dwie pętle są równoważne, jeżeli jedną z nich można tak przesunąć po powierzchni bez przekładania przez wierzchołki kołków, by wyglądała dokładnie tak, jak druga. Pętlę nazwiemy ściągalną, jeśli można ją bez żadnych ograniczeń dowolnie przemieszczać po całej płaszczyźnie, innymi słowy – jeśli jest to pętla niezaczepiona na żadnym z kołków (np. taka jak „motyl" z rysunku 10).



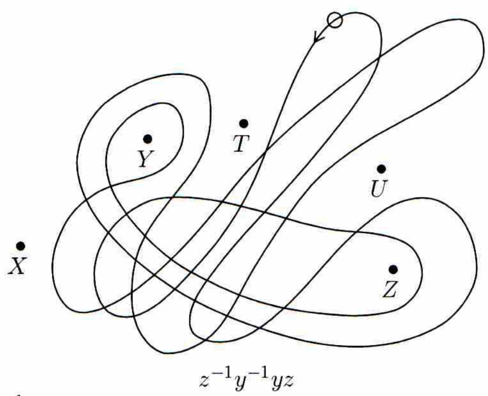
Rys. 6



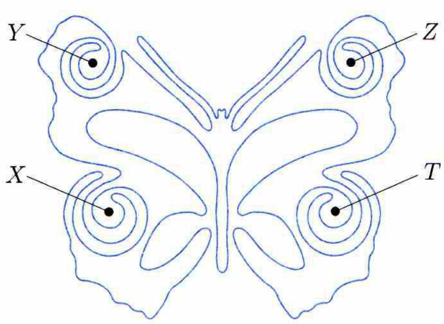
Rys. 7




Rys. 8




Rys. 9

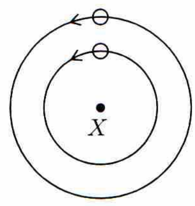



Rys. 10

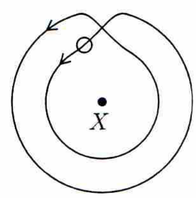
Do opisu rysunku pętli użyjemy symboli literowych. Najpierw każdy z wyróżnionych punktów płaszczyzny (odpowiadających kołkom) nazwiemy wielkimi literami alfabetu $(X, Y, Z, \ldots)$. Następnie w rysowanej pętli zaznaczymy kierunek rysowania oraz początek pętli, który, rzecz jasna, jest jednocześnie jej końcem. Te dwa parametry pozwolą nam przypisywać pętli ciąg symboli – małych liter odpowiadających wyróżnionym punktom, które pętla obiega. Przyjmujemy przy tym następujące zasady.

1. Każdą pętlę ściągalną oznaczymy symbolem 1.
2. Jeżeli rysujemy pętlę, to jednocześnie zapisujemy kolejne litery odpowiadające punktom, które pętla otacza, przy czym obiegając np. punkt $X$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara piszemy $x$, a zgodnie z ruchem wskazówek zegara $x^{-1}$.
3. Ciąg symboli odpowiadających ustalonej pętli będziemy redukować do możliwie najkrótszego zapisu, usuwając z zapisu każdy fragment postaci $aa^{-1}$ oraz $a^{-1}a$.

Zauważmy, że właściwie każdą pętlę można posklejać z pętli najprostszych (rys. 11), jeśli będziemy trzymać się zasady, wedle której możliwy jest obieg po całej pętli bez naruszenia kierunków pierwotnych w najprostszych pętlach wchodzących w jej skład.

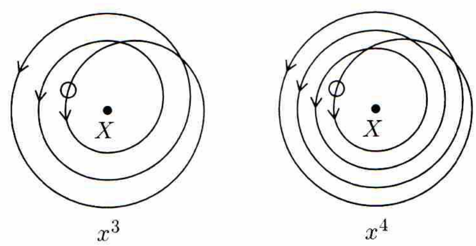



Rys. 11a



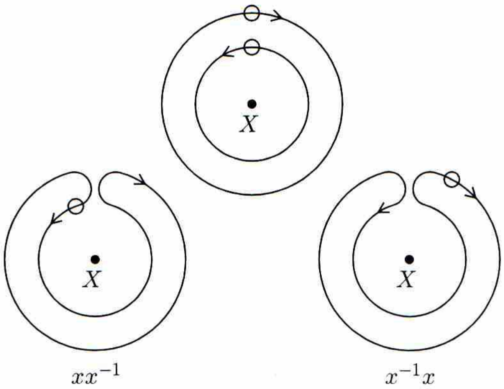

Rys. 11b

Rozważmy na początek pętle obiegające jeden punkt $X$. Weźmy np. dwie pętle obiegające punkt $X$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i sklejmy je według powyższej zasady. Obie pętle oznaczymy symbolem $x$. Niezależnie od tego, czy najpierw będziemy obiegać pętlę, która na rysunku jest większa, czy też pętlę, która jest mniejsza, po ich sklejeniu powstanie pętla równoważna tej, która jest na rysunku 11b. W każdej z tych sytuacji otrzymanej pętli przypiszemy symbol $xx$, który dla skrótu zapiszemy w postaci $x^2$. Po sklejeniu trzech czy czterech pętli równoważnych pętli $x$ powstaną pętle oznaczone jako $x^3$ i $x^4$ (rys. 12).



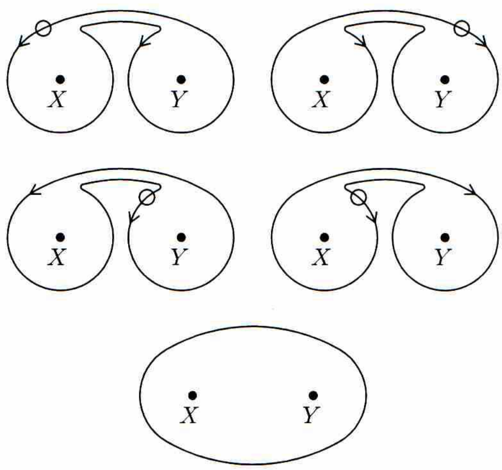

Rys. 12

Łatwo zauważyć, że sklejenie pętli $x$ z pętlą $x^{-1}$ prowadzi do pętli ściągalnej. Jest to więc zgodne z przyjętą zasadą usuwania z zapisu nazwy pętli symboli postaci $aa^{-1}$ i $a^{-1}a$. Tak więc obie pętle: $xx^{-1}$ i $x^{-1}x$ są pętlami ściągalnymi i możemy im przypisać symbol 1 (rys. 13).



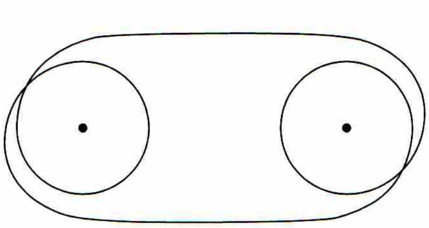
Rys. 13

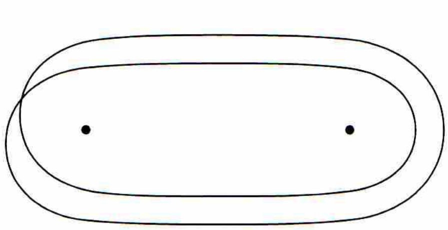
Przejdźmy teraz do pętli obiegających dwa punkty: $X$ i $Y$. Będziemy je sklejać z pętli prostych postaci $x$, $x^{-1}$, $y$ i $y^{-1}$. Zauważmy, że jeżeli w rysunkach zapomnimy zaznaczyć punkt początkowy (końcowy) pętli oraz kierunek obiegu, to cztery różne pętle $xy$, $y^{-1}x^{-1}$, $yx$ i $x^{-1}y^{-1}$ będą wyglądać tak samo (rys. 14), ale aż takie uproszczenia nas nie interesują.



Rys. 14

Rozróżniamy bowiem, który kołek obchodzimy najpierw, który potem i w jakim kierunku to robimy. Jest to o tyle ważne, że w przeciwnym razie doszlibyśmy do błędnego wniosku, że np. $xy = yx$, co z kolei sugerowałoby istnienie możliwości przemieszczania pętli z rysunku 15 do postaci pętli z rysunku 16, co, jak widać „gołym okiem", nie jest wykonalne.

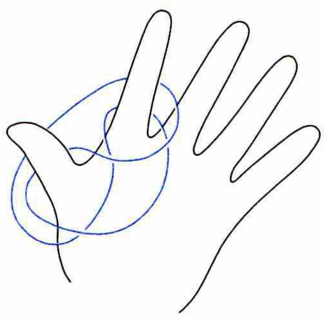

Rys. 15


Rys. 16

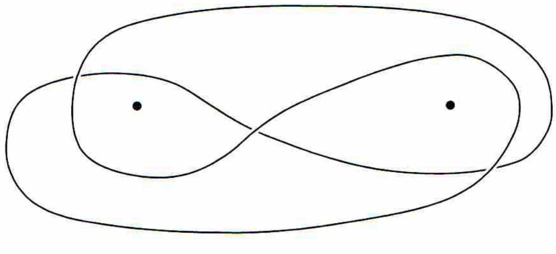
Rzeczywiście, przy ustaleniu np. dodatniego obiegu względem punktu $X$, w zależności od określenia punktu początkowego, pętla z rysunku 15 reprezentuje każdą z pętli $x^2y^2$, $xy^2x$, $y^2x^2$ $yx^2y$, natomiast pętla z rysunku 16 tylko $xyxy$ lub $yxyx$. Widzimy zatem, że działanie łączenia pętli (słów) nie jest przemienne! Zauważmy jeszcze tylko, że zdjęcie pętli z kołka $X$ pociąga za sobą modyfikację zapisu przez usunięcie z niego symboli $x$ i $x^{-1}$. Każda z pętli z rysunków 15 i 16 zostałaby w ten sposób doprowadzona do postaci $y^2$ (przy zachowaniu wcześniej ustalonego dodatniego obiegu).

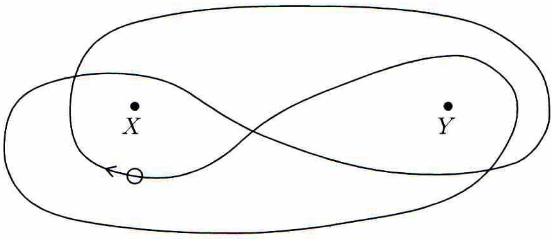
Jesteśmy już gotowi, by wykorzystać wprowadzony wyżej formalny opis do wyjaśnienia tajemnicy magicznej sztuczki. Powróćmy zatem do pętli z rysunków 4 i 5 i do ich uproszczonych wersji z rysunków 8 i 9. Pierwszą z nich można nazwać słowem $x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz$. Druga powstaje z niej przez zdjęcie z palca $X$, zatem jej zapis ma postać $z^{-1}y^{-1}yz$, ale z tego zapisu już widać, że jest to pętla ściągalna, bo po usunięciu ciągu symboli $y^{-1}y$ zostanie tylko $z^{-1}z$, a zatem nazwą dla tej pętli jest symbol 1! W ten sposób na pozór magiczny efekt znalazł zupełnie racjonalne wytłumaczenie.

Skoro już mamy sposób nazywania pętli, pozwalający z nazwy wywnioskować jej ważne własności, pobawmy się przez chwilę w tworzenie pętli dla iluzjonisty. Na rysunku 17a przedstawiona jest pętla mająca tę własność, że jeśli zdejmiemy ją z któregokolwiek palca, to z drugiego palca można już ją ściągnąć.


Rys. 17a

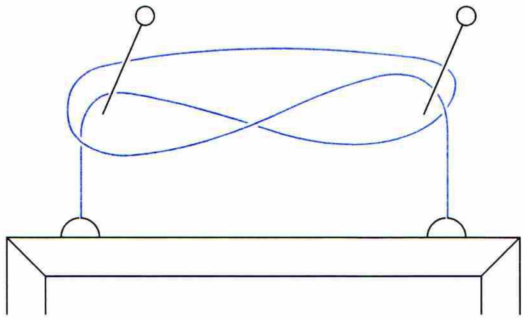
Rzeczywiście, jej płaski rysunek pozwala nazwać ją np. słowem $x^{-1}y^{-1}xy$. Jeśli zdejmiemy ją z palca $X$, to zostanie nam pętla o nazwie $y^{-1}y$, a jeśli zdejmiemy ją z palca $Y$, zostanie nam pętla o nazwie $x^{-1}x$. Idąc za sugestią p. Michała Krycha, można by to wyrazić tak: gdybyśmy zawiesili na ścianie obrazek zaczepiony na dwóch gwoździach tak, jak na rysunku 17d, to wyciągnięcie któregokolwiek z gwoździ sprawi, że obrazek spadnie.


Rys. 17b




$x^{-1}y^{-1}xy$

Rys. 17c



Rys. 17d

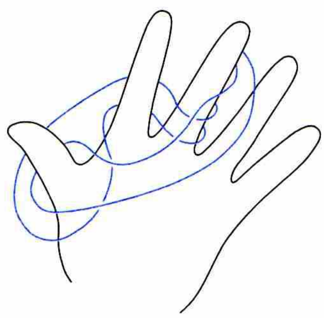
Czy potrafilibyśmy zawiesić obrazek na trzech gwoździach, by po wyjęciu któregokolwiek z nich obrazek spadł? Co prawda, nie jest to łatwe, ale takie zawieszenie jest możliwe na trzech i na czterech, i na dowolnej skończonej liczbie gwoździ. Zacznijmy od słowa, które odpowiada za takie zaczepienie na dwóch gwoździach i oznaczmy je symbolem $[x, y]$:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

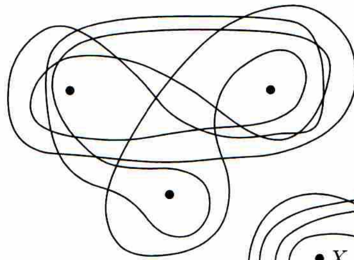
Jak zauważyliśmy, zastąpienie symbolu $x$ przez 1 lub symbolu $y$ przez 1 prowadzi do pętli ściągalnej. Innymi słowy, można przyjąć, że $[1, y] = 1$ i $[x, 1] = 1$. Jeśli teraz $p$ jest słowem odpowiadającym pętli zaplątanej wokół $m$ punktów, a przez $p^{-1}$ oznaczymy tę samą pętlę, tyle że mającą przeciwny kierunek obiegu, to łatwo stwierdzić, że pętle $p^{-1}p$ i $pp^{-1}$ są ściągalne, czyli $p^{-1}p = pp^{-1} = 1$. Mając to na względzie, widzimy, że pętla odpowiadająca słowu $[p, z]$ po zdjęciu z punktu odpowiadającego $z$ staje się ściągalną. To oznacza w szczególności, że pętla postaci

$$\begin{aligned}[][x, y], z] &= [x, y]^{-1}z^{-1}[x, y]z = \\ &= (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1}z^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz = \\ &= y^{-1}x^{-1}yxz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz\end{aligned}$$

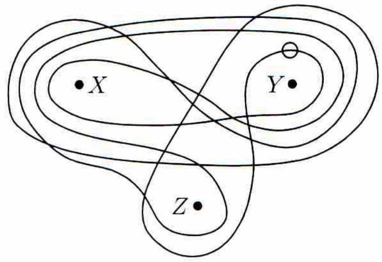
odpowiada za takie powieszenie obrazka na trzech gwoździach, o jakim mówimy wyżej. Jej wygląd pokazuje rysunek 18.



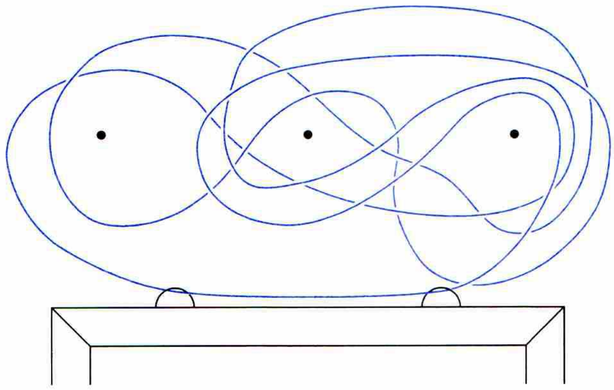
Rys. 18a



Rys. 18b




Rys. 18c $\qquad [[x, y], z] = y^{-1}x^{-1}yxz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz$



Rys. 18d

Teraz już nietrudno się domyśleć, że wieszanie obrazka według opisanej zasady na czterech gwoździach można np. zrobić zgodnie ze słowem $[[[x, y], z], t]$, na pięciu – $[[[[x, y], z], t], u]$ i tak dalej.

Zostawiamy Czytelnikowi wymyślenie, jak sprawnie i szybko takie pętle wykonane ze sznurka zakładać na palcach ręki lub kołkach.

Została nam jeszcze sprawa grupy. Otóż grupa, która zawiera w sobie te wszystkie prawa rządzące pętlami, jakie można zaplątać wokół wyróżnionych $n$ punktów $X_1, X_2, \ldots, X_n$, to grupa, której elementami są wszystkie możliwe 'słowa', jakie możemy utworzyć z symboli $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}$, zapisanych kolejno jeden po drugim. Przyjmujemy przy tym, że dwa słowa są identyczne, jeśli z jednego z nich można otrzymać drugie w skończonej liczbie kroków wstawiając bądź usuwając z niego fragmenty postaci $aa^{-1}$ lub $a^{-1}a$. Działaniem w zbiorze tych słów jest ich łączenie: jeśli $w_1, w_2$ są słowami, to

$$w_1 \circ w_2 \stackrel{\text{def.}}{=} w_1w_2.$$

Elementem neutralnym jest, oczywiście, słowo 1, a łączność działania nie budzi wątpliwości.

Na zakończenie sugerujemy zbadanie własności trzech pętli, których nazwy podane są poniżej.

**1.** $[x, yz][z, xy][y, zx]$

**2.** $[x, yzt][t, xyz][z, txy][y, ztx]$

**3.** $[x, y, x^{-1}zx][z, x, z^{-1}yz][y, z, y^{-1}xy]$